

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono ja $S_M = \sum_{n=1}^M a_n$ sen osasummien jono.

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono ja $S_M = \sum_{n=1}^M a_n$ sen osasummien jono. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ on äärellisenä olemassa.

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono ja $S_M = \sum_{n=1}^M a_n$ sen osasummien jono. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ on äärellisenä olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$).

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono ja $S_M = \sum_{n=1}^M a_n$ sen osasummien jono. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ on äärellisenä olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$). Jos sarja

suppenee, sanotaan, että sen *summa* on $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Lause 4.6. (Hajaantumistarkastin)

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Lause 4.6. (Hajaantumistarkastin)

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Jos siis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, niin sarja hajaantuu.

Lause 4.6. (Hajaantumistarkastin)

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Jos siis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, niin sarja hajaantuu.

Esimerkki 4.7 (Geometrisen sarja)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ jos } |q| < 1$$

Seuraus 4.9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

jos oikean puolen sarjat suppenevat.

Määritelmä

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee *itseisesti*, jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee.

Määritelmä

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee *itseisesti*, jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee. Jos sarja suppenee, mutta jälkimmäinen ei toteudu, sanotaan että sarja suppenee *ehdollisesti*.

Määritelmä

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee *itseisesti*, jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee. Jos sarja suppenee, mutta jälkimmäinen ei toteudu, sanotaan että sarja suppenee *ehdollisesti*.

Seuraus 4.10

Itseisesti suppeneva sarja suppenee.

Lause 4.12 (Integraalitarkastin)

Olkoon $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ei-negatiivinen ja vähenevä. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \downarrow \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x) dx \downarrow .$$

Suppenevassa tapauksessa on voimassa

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

Lause 4.17 (Vertailutarkastin)

Oletetaan, että $0 \leq a_n \leq b_n$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$$

Lause 4.17 (Vertailutarkastin)

Oletetaan, että $0 \leq a_n \leq b_n$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$$

Tämän looginen kontrapositio on seuraava:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \uparrow$$

Lause 4.23 (Osamäärätarkastin)

Sarjalle $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- Jos on olemassa sellainen $L < 1$, että $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq L$, niin sarja suppenee (vieläpä itseisesti).

Lause 4.23 (Osamäärätarkastin)

Sarjalle $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- Jos on olemassa sellainen $L < 1$, että $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq L$, niin sarja suppenee (vieläpä itseisesti).
- Jos on olemassa sellainen $L > 1$, että $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq L$, niin sarja hajaantuu.

Lause 4.24 (Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto)

Oletetaan, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = K.$$

- Jos $K < 1$, niin sarja suppenee itseisesti.

Lause 4.24 (Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto)

Oletetaan, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = K.$$

- Jos $K < 1$, niin sarja suppenee itseisesti.
- Jos $K > 1$, niin sarja hajaantuu.

Lause 4.24 (Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto)

Oletetaan, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = K.$$

- Jos $K < 1$, niin sarja suppenee itseisesti.
- Jos $K > 1$, niin sarja hajaantuu.

Esimerkkejä

Esimerkit 4.25 – 4.28.

Määritelmä

Sarja on *vuorotteleva* eli *alternoiva*, jos se on muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

missä luvut a_n ovat kaikki samanmerkkisiä (tai nollia).

Määritelmä

Sarja on *vuorotteleva* eli *alternoiva*, jos se on muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

missä luvut a_n ovat kaikki samanmerkkisiä (tai nollia).

Lause 4.29 (Leibniz)

Jos positiivilukujen jono $a_0, a_1, a_2, \dots$ on vähenevä ($a_{n+1} \leq a_n$) ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

suppenee ja sen jäännöstermi $R_M = S - S_M$ on samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi ja lisäksi $|R_M| \leq a_{M+1}$.

Esimerkki 4.31

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Esimerkki 4.31

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Huomautus

Lisäämällä sulkuja suppenevaan sarjaan saadaan osasummien osajono, joka suppenee kohti alkuperäistä summaa:

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2})}_{b_2} + \dots$$

Esimerkki 4.31

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Huomautus

Lisäämällä sulkuja suppenevaan sarjaan saadaan osasummien osajono, joka suppenee kohti alkuperäistä summaa:

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2})}_{b_2} + \dots$$

Sen sijaan sulkeiden poistaminen voi johtaa ongelmiin:

$$S = 0 + 0 + 0 + \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

suppenee, mutta sulkeet poistamalla saatava sarja hajaantuu.

Esimerkki 4.32

Sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

termien uudelleenjärjestys.

Esimerkki 4.32

Sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

termien uudelleenjärjestys.

- Sarja suppene Leibnizin lauseen perusteella ja sen summa toteuttaa $\frac{1}{2} < S < \frac{5}{6}$.

Esimerkki 4.32

Sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

termien uudelleenjärjestys.

- Sarja suppene Leibnizin lauseen perusteella ja sen summa toteuttaa $\frac{1}{2} < S < \frac{5}{6}$.
- Sulkeita asettamalla saadaan

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right),$$

Esimerkki 4.32

Sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

termien uudelleenjärjestys.

- Sarja suppene Leibnizin lauseen perusteella ja sen summa toteuttaa $\frac{1}{2} < S < \frac{5}{6}$.
- Sulkeita asettamalla saadaan

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right), \quad \text{josta}$$

$$\frac{S}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right).$$

Esimerkki 4.32

- Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= S - \frac{S}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots\end{aligned}$$

Esimerkki 4.32

- Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= S - \frac{S}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots\end{aligned}$$

- Nyt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{S}{2},$

Esimerkki 4.32

- Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= S - \frac{S}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots\end{aligned}$$

- Nyt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{S}{2},$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{3n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{S}{2},$

Esimerkki 4.32

- Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= S - \frac{S}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots\end{aligned}$$

- Nyt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{S}{2},$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{3n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{S}{2},$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{3n+3} + \frac{1}{4n} \right) = \frac{S}{2}.$

Lause 4.33

Itseisesti suppenevan sarjan termien järjestystä voi vaihtaa suppenemisen tai summan muuttumatta.

Lause 4.33

Itseisesti suppenevan sarjan termien järjestystä voi vaihtaa suppenemisen tai summan muuttumatta.

Todistuksen idea

- Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä järjestystä muuttamalla saatu sarja; $a_n = b_{f(n)}$.

Lause 4.33

Itseisesti suppenevan sarjan termien järjestystä voi vaihtaa suppenemisen tai summan muuttumatta.

Todistuksen idea

- Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä järjestystä muuttamalla saatu sarja; $a_n = b_{f(n)}$.
- Oletetaan ensin, että $a_n \geq 0$; olkoot osasummat S_n ja T_n .

Lause 4.33

Itseisesti suppenevan sarjan termien järjestystä voi vaihtaa suppenemisen tai summan muuttumatta.

Todistuksen idea

- Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä järjestystä muuttamalla saatu sarja; $a_n = b_{f(n)}$.
- Oletetaan ensin, että $a_n \geq 0$; olkoot osasummat S_n ja T_n .
- Koska S_n on kasvava ja $\lim S_n = S$, on $S - \epsilon < S_l < S$ aina, kun $l \geq N_\epsilon$

Itseinen suppeneminen

Lause 4.33

Itseisesti suppenevan sarjan termien järjestystä voi vaihtaa suppenemisen tai summan muuttumatta.

Todistuksen idea

- Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä järjestystä muuttamalla saatu sarja; $a_n = b_{f(n)}$.
- Oletetaan ensin, että $a_n \geq 0$; olkoot osasummat S_n ja T_n .
- Koska S_n on kasvava ja $\lim S_n = S$, on $S - \epsilon < S_l < S$ aina, kun $l \geq N_\epsilon$.
- Jos valitaan n suuremmaksi kuin N_ϵ , $f(1), \dots, f(N_\epsilon)$, ja $k \leq N_\epsilon$, on $f(k) < n$ ja jokainen termi $a_k = b_{f(k)}$ on mukana osasummassa T_n .

Lause 4.33

Itseisesti suppenevan sarjan termien järjestystä voi vaihtaa suppenemisen tai summan muuttumatta.

Todistuksen idea

- Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä järjestystä muuttamalla saatu sarja; $a_n = b_{f(n)}$.
- Oletetaan ensin, että $a_n \geq 0$; olkoot osasummat S_n ja T_n .
- Koska S_n on kasvava ja $\lim S_n = S$, on $S - \epsilon < S_l < S$ aina, kun $l \geq N_\epsilon$.
- Jos valitaan n suuremmaksi kuin N_ϵ , $f(1), \dots, f(N_\epsilon)$, ja $k \leq N_\epsilon$, on $f(k) < n$ ja jokainen termi $a_k = b_{f(k)}$ on mukana osasummassa T_n . Täten $T_n \geq S_{N_\epsilon} \geq S - \epsilon$.

Todistuksen idea

- Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä järjestystä muuttamalla saatu sarja; $a_n = b_{f(n)}$.
- Oletetaan ensin, että $a_n \geq 0$; olkoot osasummat S_n ja T_n .
- Koska S_n on kasvava ja $\lim S_n = S$, on $S - \epsilon < S_l < S$ aina, kun $l \geq N_\epsilon$.
- Jos valitaan n suuremmaksi kuin N_ϵ , $f(1), \dots, f(N_\epsilon)$, ja $k \leq N_\epsilon$, on $f(k) < n$ ja jokainen termi $a_k = b_{f(k)}$ on mukana osasummassa T_n . Täten $T_n \geq S_{N_\epsilon} \geq S - \epsilon$.

Todistuksen idea

- Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä järjestystä muuttamalla saatu sarja; $a_n = b_{f(n)}$.
- Oletetaan ensin, että $a_n \geq 0$; olkoot osasummat S_n ja T_n .
- Koska S_n on kasvava ja $\lim S_n = S$, on $S - \epsilon < S_l < S$ aina, kun $l \geq N_\epsilon$.
- Jos valitaan n suuremmaksi kuin N_ϵ , $f(1), \dots, f(N_\epsilon)$, ja $k \leq N_\epsilon$, on $f(k) < n$ ja jokainen termi $a_k = b_{f(k)}$ on mukana osasummassa T_n . Täten $T_n \geq S_{N_\epsilon} \geq S - \epsilon$.
- Analogisesti voidaan päätellä $T_n \leq S_l \leq S$, joten siis $S - \epsilon \leq T_n \leq S$.

Todistuksen idea

- Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppeneva ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä järjestystä muuttamalla saatu sarja; $a_n = b_{f(n)}$.
- Oletetaan ensin, että $a_n \geq 0$; olkoot osasummat S_n ja T_n .
- Koska S_n on kasvava ja $\lim S_n = S$, on $S - \epsilon < S_l < S$ aina, kun $l \geq N_\epsilon$.
- Jos valitaan n suuremmaksi kuin N_ϵ , $f(1), \dots, f(N_\epsilon)$, ja $k \leq N_\epsilon$, on $f(k) < n$ ja jokainen termi $a_k = b_{f(k)}$ on mukana osasummassa T_n . Täten $T_n \geq S_{N_\epsilon} \geq S - \epsilon$.
- Analogisesti voidaan päätellä $T_n \leq S_l \leq S$, joten siis $S - \epsilon \leq T_n \leq S$.
- Yleinen väite seuraa hajotelmasta $a_n = a_n^+ - a_n^-$ ja epäyhtälöistä $a_n^+ \leq |a_n|$, $a_n^- \leq |a_n|$.

Määritelmä

Sarjojen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *tulosarjalla* tarkoitetaan mitä hyvänsä muotoa

$$\sum a_i b_j$$

olevaa sarjaa, jossa kukin pari (i, j) esiintyy tasan kerran.

Määritelmä

Sarjojen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *tulosarjalla* tarkoitetaan mitä hyvänsä muotoa

$$\sum a_i b_j$$

olevaa sarjaa, jossa kukin pari (i, j) esiintyy tasan kerran.

Lause 4.34.

Jos sarjat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ suppenevat itseisesti, niin jokainen tulosarja $\sum a_i b_j$ suppenee itseisesti kohti lukua AB .

Lauseen 4.34 todistus (idea)

- Olkoon $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ jokin tulosarja, $c_k = a_{i(k)}b_{j(k)}$.

Lauseen 4.34 todistus (idea)

- Olkoon $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ jokin tulosarja, $c_k = a_{i(k)} b_{j(k)}$.
- Jos osasummassa $U_n = \sum_{k=0}^n |c_k|$ ovat N ja M suurimmat luvuista $i(k)$ ja $j(k)$, on

$$U_n \leq \sum_{i=0}^N |a_i| \cdot \sum_{j=0}^M |b_j| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|,$$

Lauseen 4.34 todistus (idea)

- Olkoon $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ jokin tulosarja, $c_k = a_{i(k)} b_{j(k)}$.
- Jos osasummassa $U_n = \sum_{k=0}^n |c_k|$ ovat N ja M suurimmat luvuista $i(k)$ ja $j(k)$, on

$$U_n \leq \sum_{i=0}^N |a_i| \cdot \sum_{j=0}^M |b_j| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|,$$

siis (kasvava) jono U_n on ylhäältä rajoitettu ja siksi suppenee.

- Summaa koskeva väite seuraa edellisestä lauseesta ja siitä, että termit voidaan järjestää ns. *Cauchyn tuloksi*