

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Lause 4.29 (Leibniz)

Jos positiivilukujen jono $a_0, a_1, a_2, \dots$ on vähenevä ($a_{n+1} \leq a_n$) ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

suppenee ja sen jäännöstermi $R_M = S - S_M$ on samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi ja lisäksi $|R_M| \leq a_{M+1}$.

Lause 4.29 (Leibniz)

Jos positiivilukujen jono $a_0, a_1, a_2, \dots$ on vähenevä ($a_{n+1} \leq a_n$) ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

suppenee ja sen jäännöstermi $R_M = S - S_M$ on samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi ja lisäksi $|R_M| \leq a_{M+1}$.

Lause 4.33

Itseisesti suppenevan sarjan termien järjestystä voi vaihtaa suppenemisen tai summan muuttumatta.

Määritelmä

Sarjojen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *tulosarjalla* tarkoitetaan mitä hyvänsä muotoa

$$\sum a_i b_j$$

olevaa sarjaa, jossa kukin pari (i, j) esiintyy tasan kerran.

Määritelmä

Sarjojen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *tulosarjalla* tarkoitetaan mitä hyvänsä muotoa

$$\sum a_i b_j$$

olevaa sarjaa, jossa kukin pari (i, j) esiintyy tasan kerran.

Lause 4.34.

Jos sarjat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ suppenevat itseisesti, niin jokainen tulosarja $\sum a_i b_j$ suppenee itseisesti kohti lukua AB .

Esimerkkejä

- Cauchyn tulo
- Esimerkki 4.35

Määritelmä

Olkoot $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ välillä I määriteltyjä funktioita.

Määritelmä

Olkoot $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ välillä I määriteltyjä funktioita. Funktiojono $f_1, f_2, f_3, \dots$ suppenee *pisteittäin* välillä I , jos jono $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ suppenee jokaisella $x \in I$.

Määritelmä

Olkoot $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ välillä I määriteltyjä funktioita. Funktiojono $f_1, f_2, f_3, \dots$ suppenee *pisteittäin* välillä I , jos jono $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ suppenee jokaisella $x \in I$.

Määritelmä

Välillä I määritellyistä funktioista $f_1, f_2, f_3, \dots$ muodostettu sarja

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

suppenee *pisteittäin* välillä I , jos sarja suppenee jokaisella $x \in I$.

Määritelmä

Olkoot $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ välillä I määriteltyjä funktioita. Funktiojono $f_1, f_2, f_3, \dots$ suppenee *pisteittäin* välillä I , jos jono $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ suppenee jokaisella $x \in I$.

Määritelmä

Välillä I määriteltyistä funktioista $f_1, f_2, f_3, \dots$ muodostettu sarja

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

suppenee *pisteittäin* välillä I , jos sarja suppenee jokaisella $x \in I$.

Esimerkki

Esimerkki 5.1

Esimerkki 5.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

suppenee, kun $|x| < 1$.

Esimerkki 5.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

suppenee, kun $|x| < 1$. Tällöin

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^M x^n + \frac{x^{M+1}}{1-x}.$$

Jäännöstermin suuruutta määrittää paitsi M , myös $d(x, 1) = 1 - x$.

Määritelmä 5.3.

Funktiojono $f_1, f_2, f_3, \dots$ suppenee kohti rajafunktiota $f(x)$ *tasaisesti* välillä I , jos $d(f_n(x), f(x))$ saadaan mielivaltaisen pieneksi aina kun $x \in I$.

Määritelmä 5.3.

Funktiojono $f_1, f_2, f_3, \dots$ suppenee kohti rajafunktiota $f(x)$ *tasaisesti* välillä I , jos $d(f_n(x), f(x))$ saadaan mielivaltaisen pieneksi aina kun $x \in I$. Toisin sanoen,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_\epsilon > 0)(\forall x \in I)(n \geq N_\epsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon)$$

Tasainen suppeneminen välillä I merkitään $\downarrow$ (tas.) I .

Määritelmä 5.3.

Funktiojono $f_1, f_2, f_3, \dots$ suppenee kohti rajafunktiota $f(x)$ *tasaisesti* välillä I , jos $d(f_n(x), f(x))$ saadaan mielivaltaisen pieneksi aina kun $x \in I$. Toisin sanoen,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_\epsilon > 0)(\forall x \in I)(n \geq N_\epsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon)$$

Tasainen suppeneminen välillä I merkitään $\downarrow$ (tas.) I .

Määritelmä 5.4.

Funktiosarja $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee *tasaisesti* kohti

summafunktiota välillä I , jos osasummien jono $F_M(x) = \sum_{n=0}^M f_n(x)$

suppenee tasaisesti kohti summafunktiota.

Esimerkkejä

- Esimerkki 5.6
- Esimerkki 5.7

Esimerkkejä

- Esimerkki 5.6
- Esimerkki 5.7

Lause 5.8

- Jos funktiot $f_n(x)$ ovat jatkuvia välillä I ja
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ (tas.) I , niin

rajafunktio $f(x)$ on jatkuva välillä I .

Esimerkkejä

- Esimerkki 5.6
- Esimerkki 5.7

Lause 5.8

- Jos funktiot $f_n(x)$ ovat jatkuvia välillä I ja
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ (tas.) I , niin

rajafunktio $f(x)$ on jatkuva välillä I . Samoin, jos $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I , niin $F(x)$ on jatkuva välillä I .

Lause 5.9. (Weierstrassin M -testi)

Oletetaan, että positiiviterminen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee. Jos $|f_n(x)| \leq M_n$ on voimassa välillä I aina kun n on riittävän suuri, niin silloin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I .

Lause 5.9. (Weierstrassin M -testi)

Oletetaan, että positiiviterminen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee. Jos $|f_n(x)| \leq M_n$ on voimassa välillä I aina kun n on riittävän suuri, niin silloin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I .

Todistuksen idea

Funktiosarjan jäännöstermille pätee

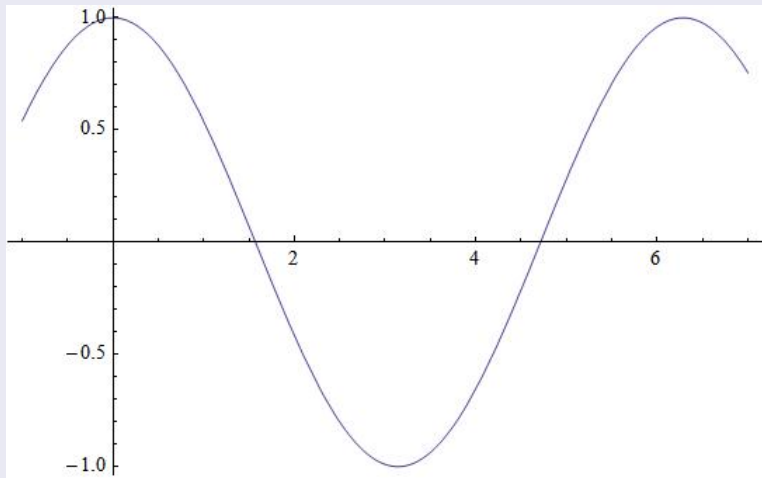
$$|R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n,$$

ja vakiosarjan loppuosa saadaan niin pieneksi kuin halutaan valitsemalla N riittävän suureksi.

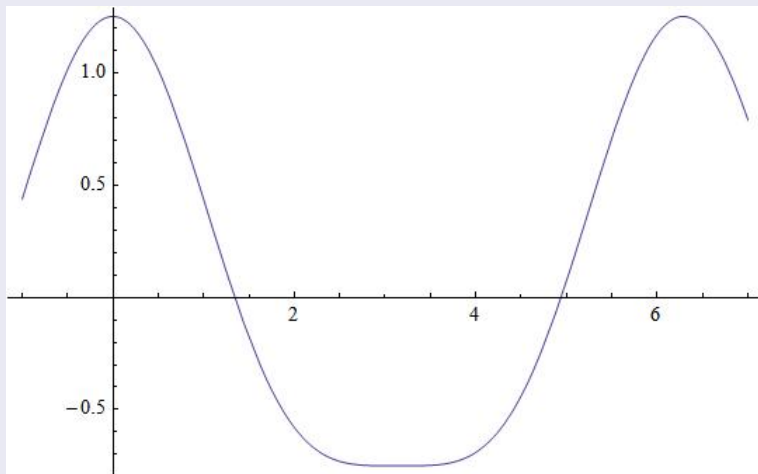
Esimerkkejä

- Esimerkki 5.10.
- Esimerkki 5.11.

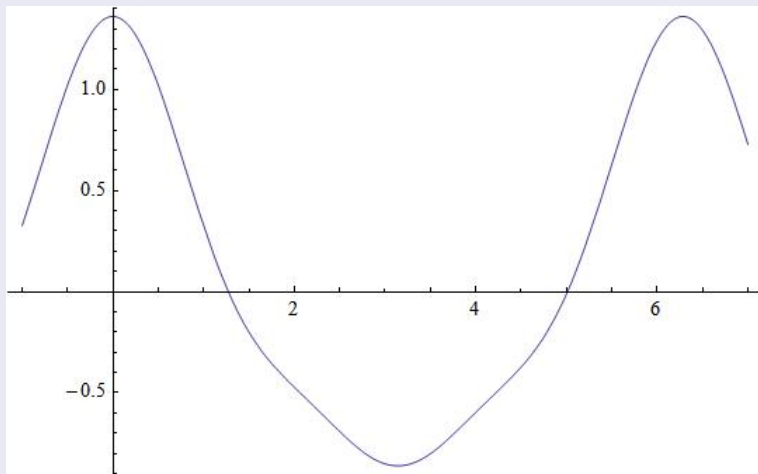
Esimerkki 5.11: $\sum_{k=1}^1 \frac{\cos(kx)}{k^2}$



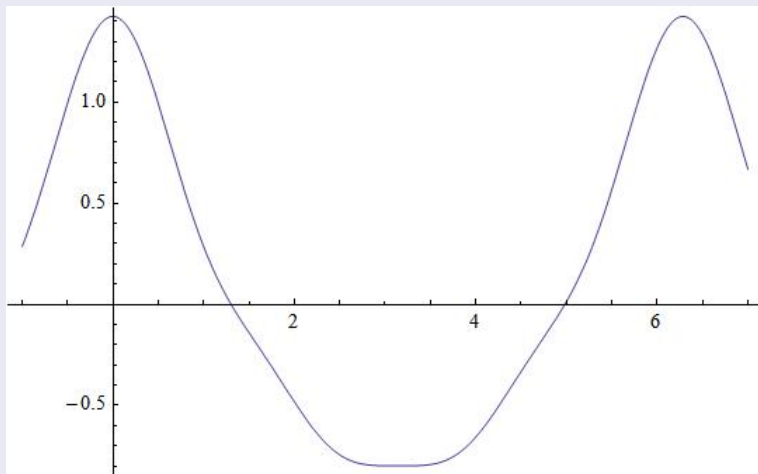
Esimerkki 5.11: $\sum_{k=1}^2 \frac{\cos(kx)}{k^2}$



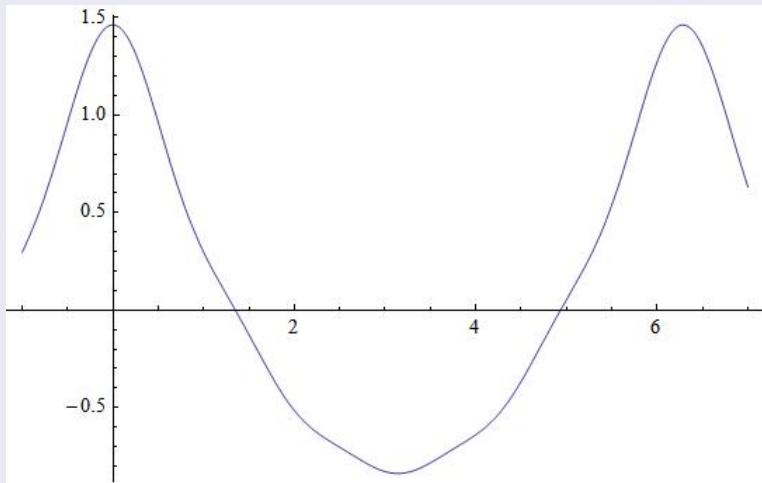
Esimerkki 5.11: $\sum_{k=1}^3 \frac{\cos(kx)}{k^2}$



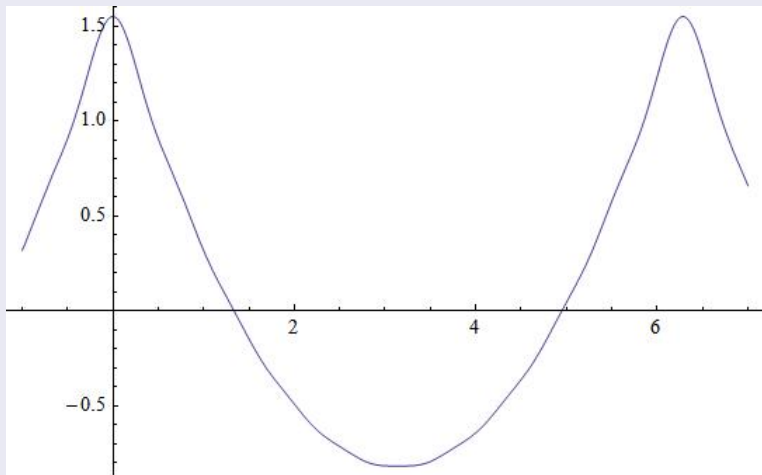
Esimerkki 5.11: $\sum_{k=1}^4 \frac{\cos(kx)}{k^2}$



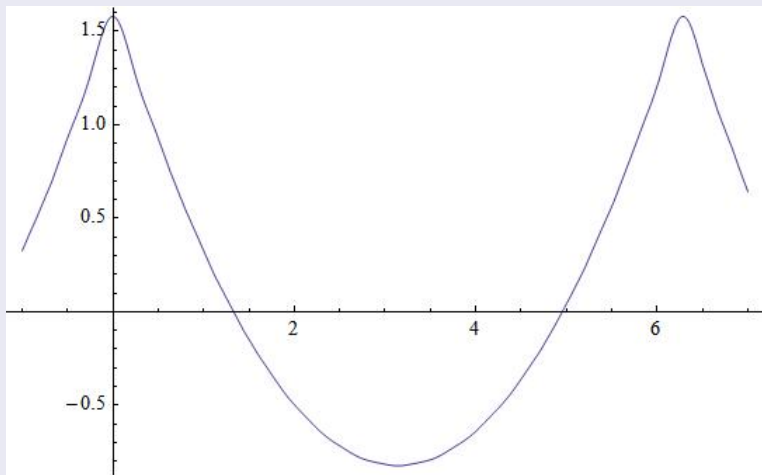
Esimerkki 5.11: $\sum_{k=1}^5 \frac{\cos(kx)}{k^2}$



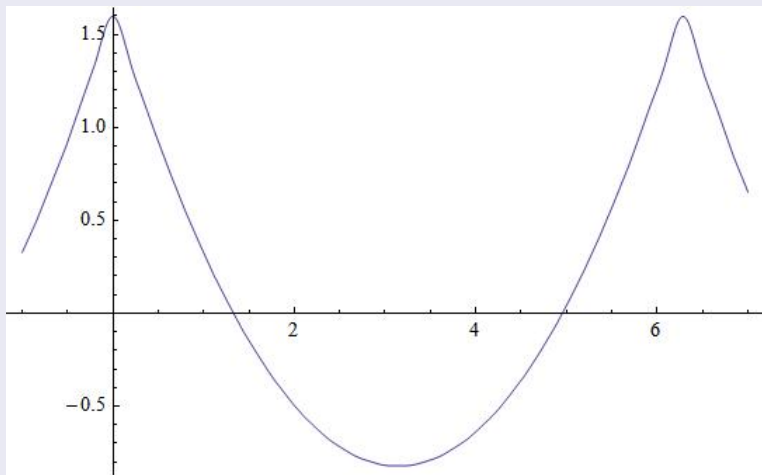
Esimerkki 5.11: $\sum_{k=1}^{10} \frac{\cos(kx)}{k^2}$



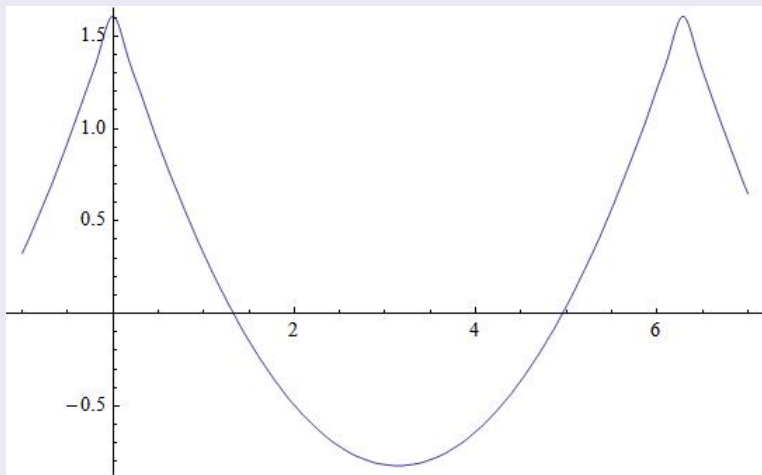
Esimerkki 5.11: $\sum_{k=1}^{15} \frac{\cos(kx)}{k^2}$



Esimerkki 5.11: $\sum_{k=1}^{20} \frac{\cos(kx)}{k^2}$



Esimerkki 5.11: $\sum_{k=1}^{25} \frac{\cos(kx)}{k^2}$



Lause 5.13

Olkoot funktiot $f_n(x)$ jatkuvia välillä $I = [a, b]$ ja oletetaan, että sarja $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I . Tällöin $F(x)$ on integroituva yli välin I ja

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Lause 5.13

Olkoot funktiot $f_n(x)$ jatkuvia välillä $I = [a, b]$ ja oletetaan, että sarja $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I . Tällöin $F(x)$ on integroituva yli välin I ja

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Todistuksen idea

- $|F(x) - F_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$, kunhan n on riittävän suuri.

Lause 5.13

Olkoot funktiot $f_n(x)$ jatkuvia välillä $I = [a, b]$ ja oletetaan, että sarja $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I . Tällöin $F(x)$ on integroituva yli välin I ja

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Todistuksen idea

- $|F(x) - F_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$, kunhan n on riittävän suuri.
- $\left| \int_a^b F - \int_a^b F_n \right| \leq \int_a^b |F(x) - F_n(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon.$

Lause 5.13

Olkoot funktiot $f_n(x)$ jatkuvia välillä $I = [a, b]$ ja oletetaan, että sarja $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I . Tällöin $F(x)$ on integroituva yli välin I ja

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Todistuksen idea

- $|F(x) - F_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$, kunhan n on riittävän suuri.
- $\left| \int_a^b F - \int_a^b F_n \right| \leq \int_a^b |F(x) - F_n(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon.$
- Näin ollen $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n(x) dx = \int_a^b F(x) dx.$