

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Lause 5.16

Oletetaan, että

- Funktiot $f_n(x)$ ovat derivoituvia ja derivaatat $f'_n(x)$ jatkuvia välillä I ,
- Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee ainakin yhdessä pisteessä $x_0 \in I$, ja
- Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I .

Tällöin sarja $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ suppenee koko välillä I ,
summafunktio f on derivoituva ja

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

Määritelmä ja ominaisuuksia

- $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- Suppeneminen
- Derivointi
- $E(x)E(y) = E(x + y)$
- Suuruusarvioita

Lause 5.19

Sarja

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

määrittelee bijektiivisen, aidosti kasvavan funktion $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, jolle $E(0) = 1$, $E'(x) = E(x)$ ja $E(x+y) = E(x)E(y)$. Funktion E käänteisfunktio $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva ja $L'(x) = \frac{1}{x}$. Lisäksi $L(xy) = L(x) + L(y)$.

Lause 5.19

Sarja

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

määrittelee bijektiivisen, aidosti kasvavan funktion $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, jolle $E(0) = 1$, $E'(x) = E(x)$ ja $E(x+y) = E(x)E(y)$. Funktion E käänteisfunktio $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva ja $L'(x) = \frac{1}{x}$. Lisäksi $L(xy) = L(x) + L(y)$.

Lause 5.20

Lauseen 5.19 ehdot määräävät funktion $E(x)$ yksikäsitteisesti.

Lause 5.22

$$E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Määritelmä

Olkoot $a_0, a_1, a_2, \dots$ reaalisia vakioita ja $x_0 \in \mathbb{R}$. Muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

olevaa sarjaa sanotaan x_0 -keskiseksi potenssisarjaksi.

Määritelmä

Olkoot $a_0, a_1, a_2, \dots$ reaalisia vakioita ja $x_0 \in \mathbb{R}$. Muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

olevaa sarjaa sanotaan x_0 -keskiseksi potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ saadaan muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

oleva sarja, joten tarkastelu voidaan periaatteessa aina palauttaa tapaukseen $x_0 = 0$.

Esimerkkejä

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ välillä $(-1, 1)$

Esimerkkejä

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ välillä $(-1, 1)$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ välillä $(-1, 1]$

Esimerkkejä

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ välillä $(-1, 1)$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ välillä $(-1, 1]$
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ joukossa $\mathbb{R}$.

Lemma

Jos potenssisarjalle

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ja jollekin luvulle $c > 0$ pätee $\lim a_n c^n = 0$, niin sarja suppenee itseisesti välillä $(-c, c)$ ja tasaisesti kaikilla väleillä $[-a, a] \subseteq (-c, c)$. Jos taas jollekin luvulle c pätee $\lim a_n c^n \neq 0$, niin sarja hajaantuu aina, kun $|x| \geq c$.

Lause 5.24

Jokaiselle sarjalle $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pätee jokin seuraavista:

- $S(x)$ hajaantuu aina kun $x \neq 0$.

Lause 5.24

Jokaiselle sarjalle $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pätee jokin seuraavista:

- $S(x)$ hajaantuu aina kun $x \neq 0$.
- $S(x)$ suppenee aina kun $x \in \mathbb{R}$.

Lause 5.24

Jokaiselle sarjalle $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pätee jokin seuraavista:

- $S(x)$ hajaantuu aina kun $x \neq 0$.
- $S(x)$ suppenee aina kun $x \in \mathbb{R}$.
- On olemassa sellainen luku $R > 0$, että $S(x)$ suppenee kun $|x| < R$ ja $S(x)$ hajaantuu kun $|x| > R$.

Lause 5.24

Jokaiselle sarjalle $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pätee jokin seuraavista:

- $S(x)$ hajaantuu aina kun $x \neq 0$.
- $S(x)$ suppenee aina kun $x \in \mathbb{R}$.
- On olemassa sellainen luku $R > 0$, että $S(x)$ suppenee kun $|x| < R$ ja $S(x)$ hajaantuu kun $|x| > R$.

Huomautus: Tällöin $R = \sup\{c \in \mathbb{R}_+ \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c^n = 0\}$.

Lause 5.24

Jokaiselle sarjalle $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pätee jokin seuraavista:

- $S(x)$ hajaantuu aina kun $x \neq 0$.
- $S(x)$ suppenee aina kun $x \in \mathbb{R}$.
- On olemassa sellainen luku $R > 0$, että $S(x)$ suppenee kun $|x| < R$ ja $S(x)$ hajaantuu kun $|x| > R$.

Huomautus: Tällöin $R = \sup\{c \in \mathbb{R}_+ \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c^n = 0\}$.

Määritelmä

Kolmannessa tapauksessa esiintyvää lukua R sanotaan potenssisarjan *suppenemissäteeksi* ja väliä $(-R, R)$ *suppenemisväliksi*. Ensimmäisessä tapauksessa määritellään $R = 0$ ja toisessa $R = \infty$.

Huomautus

Muotoa

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevalle potenssisarjalle suppenemisväli on muotoa $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Huomautus

Muotoa

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevalle potenssisarjalle suppenemisväli on muotoa $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Huomautus

Sarjojen $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, ja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ suppenemisväli on $(-1, 1)$, mutta suppeneminen välin päätepisteissä on jokaisessa tapauksessa erilainen.

Huomautus

Lauseen 5.13 perusteella potenssisarja suppenee tasaisesti kaikilla suppenemisväliin sisältyvillä suljetuilla väleillä. Tällaisilla väleillä termeittäin integrointi siis onnistuu.

Huomautus

Lauseen 5.13 perusteella potenssisarja suppenee tasaisesti kaikilla suppenemisväliin sisältyvillä suljetuilla väleillä. Tällaisilla väleillä termeittäin integrointi siis onnistuu.

Lemma 5.26

Potenssisarjoilla $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ on sama suppenemissäde.

Lemman 5.26 todistus

Jos $|na_n c^{n-1}|$ lähenee nollaa, kun $n \rightarrow \infty$, tekee
 $|a_n c^n| = \frac{c}{n} |na_n c^{n-1}|$ samoin.

Lemman 5.26 todistus

Jos $|na_n c^{n-1}|$ lähenee nollaa, kun $n \rightarrow \infty$, tekee $|a_n c^n| = \frac{c}{n} |na_n c^{n-1}|$ samoin.

Valitaan sitten $0 < c_1 < c$. Tällöin $|na_n c_1^{n-1}| = |a_n c^n| n \left(\frac{c_1}{c}\right)^n \frac{1}{c_1}$ ja koska $\lim n\alpha^n = 0$ kun $\alpha \in (0, 1)$, nähdään, että $|na_n c_1^{n-1}|$ lähenee nollaa mikäli $|a_n c^n|$ tekee niin. Koska c_1 voidaan valita miten läheltä tahansa lukua c , seuraa väite välittömästi.

Lause 5.27

Oletetaan, että potenssisarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemissäde on $R > 0$. Tällöin

- $S(x)$ on jatkuva välillä $(-R, R)$.

Lause 5.27

Oletetaan, että potenssisarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemissäde on $R > 0$. Tällöin

- $S(x)$ on jatkuva välillä $(-R, R)$.
- $S(x)$ on integroituva jokaisella välillä $[a, b] \subset (-R, R)$ ja

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

Lause 5.27

Oletetaan, että potenssisarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemissäde on $R > 0$. Tällöin

- $S(x)$ on jatkuva välillä $(-R, R)$.
- $S(x)$ on integroituva jokaisella välillä $[a, b] \subset (-R, R)$ ja

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

- $S(x)$ on derivoituva välillä $(-R, R)$ ja

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Seuraus 5.29

Potenssisarjan summafunktiolla $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ on suppenemisvälillä $(-R, R)$ kaikkien kertalukujen derivaatat ja lisäksi

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Seuraus 5.29

Potenssisarjan summafunktiolla $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ on suppenemisvälillä $(-R, R)$ kaikkien kertalukujen derivaatat ja lisäksi

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Lause 5.30 (Potenssisarjojen identtisyyslause)

Jos jossakin origon ympäristössä $(-\delta, \delta)$ pätee

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

niin $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}$.