Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Esimerkki 5.40. (Binomisarja)

Jos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, määritellään *yleistetty binomikerroin*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Kertausta

Esimerkki 5.40. (Binomisarja)

Jos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, määritellään *yleistetty binomikerroin*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Tällöin

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Esimerkki 5.40. (Binomisarja)

Jos $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, määritellään *yleistetty binomikerroin*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Tällöin

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Esimerkki 5.41. (Arkustangentti)

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Kertausta

Esimerkki 5.42 (Arkussini)

$$\arcsin x = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

Taylorin sarjat

Tunnettuja sarjoja

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad (|x| < 1)$

Taylorin sarjat

Tunnettuja sarjoja

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$

Tunnettuja sarjoja

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$

Taylorin sarjat

Tunnettuja sarjoja

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$

Taylorin sarjat

Tunnettuja sarjoja

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$
  $= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots \qquad (|x| < 1)$

Tunnettuja sarjoja

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1)$
- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$
  $= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots \qquad (|x| < 1)$

Muita sarjoja voidaan saada edellisistä sijoituksella, yhteen- ja kertolaskuilla, integroimalla ja derivoimalla.

Esimerkki 5.42

Onko funktiolla

$$f(x) = \sin x - x\sqrt{1 + x^3}$$

ääriarvokohta origossa?

Esimerkki 5.42

Onko funktiolla

$$f(x) = \sin x - x\sqrt{1+x^3}$$

ääriarvokohta origossa?

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots\right) - x\left(1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \dots\right) \\ &= -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{629}{5040}x^7 + \dots \\ &= x^3\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{120}x^2 + \frac{629}{5040}x^3 + \dots\right) \end{aligned}$$

Esimerkki 5.43

Onko funktiolla

$$f(x) = \cos x + \frac{x}{2}\sin x$$

ääriarvokohta origossa?

Lause 5.45

Olkoon f:llä jossain x_0:n ympäristössä esitys Taylorin sarjana

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

missä $a_{n_0} \neq 0$. Jos n_0 on pariton, ei f:llä ole ääriarvokohtaa pisteessä x_0. Jos n_0 on parillinen, niin tapauksessa $a_{n_0} > 0$ funktiolla on lokaali minimi, ja päinvastaisessa tapauksessa lokaali maksimi.

Lause 5.45

Olkoon f:llä jossain x_0:n ympäristössä esitys Taylorin sarjana

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

missä $a_{n_0} \neq 0$. Jos n_0 on pariton, ei f:llä ole ääriarvokohtaa pisteessä x_0. Jos n_0 on parillinen, niin tapauksessa $a_{n_0} > 0$ funktiolla on lokaali minimi, ja päinvastaisessa tapauksessa lokaali maksimi.

Huomautus 5.46

Lause soveltuu myös, vaikka käytettävissä olisi sarjan asemasta Taylorin polynomi ja sen virhetermi.

Esimerkki 5.48.

Integraalille

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

likiarvo, jonka virhe on korkeintaan $\frac{1}{1000}$.

Ordo-merkintä

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\,,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$.

Ordo-merkintä

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\,,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$. Tapauksessa $x_0 = \infty$ avoin ympäristö tarkoittaa väliä (M, ∞).

Ordo-merkintä

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\,,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$. Tapauksessa $x_0 = \infty$ avoin ympäristö tarkoittaa väliä (M, ∞). Merkintä $f(x) = g(x) + O(h(x))$ tarkoittaa $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

Esimerkki

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \to 0$$

Ordo-merkintä

Esimerkki

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \to 0$$

Esimerkki

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5), \quad \text{kun } x \in \mathbb{R}$$