Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Lause 5.45

Olkoon f:llä jossain x_0:n ympäristössä esitys Taylorin sarjana

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

missä $a_{n_0} \neq 0$. Jos n_0 on pariton, ei f:llä ole ääriarvokohtaa pisteessä x_0. Jos n_0 on parillinen, niin tapauksessa $a_{n_0} > 0$ funktiolla on lokaali minimi, ja päinvastaisessa tapauksessa lokaali maksimi.

Lause 5.45

Olkoon f:llä jossain x_0:n ympäristössä esitys Taylorin sarjana

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

missä $a_{n_0} \neq 0$. Jos n_0 on pariton, ei f:llä ole ääriarvokohtaa pisteessä x_0. Jos n_0 on parillinen, niin tapauksessa $a_{n_0} > 0$ funktiolla on lokaali minimi, ja päinvastaisessa tapauksessa lokaali maksimi.

Huomautus 5.46

Lause soveltuu myös, vaikka käytettävissä olisi sarjan asemasta Taylorin polynomi ja sen virhetermi.

Kertausta

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\,,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$.

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\,,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$. Tapauksessa $x_0 = \infty$ avoin ympäristö tarkoittaa väliä (M, ∞).

Määritelmä

Jos on olemassa vakio $K > 0$ ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K\,|g(x)|\,,$$

merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \to x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$. Tapauksessa $x_0 = \infty$ avoin ympäristö tarkoittaa väliä (M, ∞). Merkintä $f(x) = g(x) + O(h(x))$ tarkoittaa $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

Ordo-merkintä

Lause

Jos $f^{(n+1)}(x)$ on jatkuva jossain pisteen x_0 avoimessa ympäristössä, niin

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + R_n(x),$$

missä $R_n(x) = O((x - x_0)^{n+1}), \quad \text{kun } x \to x_0.$

Todistus

Taylorin lauseen mukaan $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, missä $\xi \in (x, x_0)$ tai $\xi \in (x_0, x)$. Jatkuvana funktiona $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ on rajoitettu jossakin x_0:n suljetussa ympäristössä $[x_0 - b, x_0 + b]$. Tällöin

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!} M \left|(x - x_0)^{n+1}\right|,$$

kun $x \in [x_0 - b, x_0 + b]$.

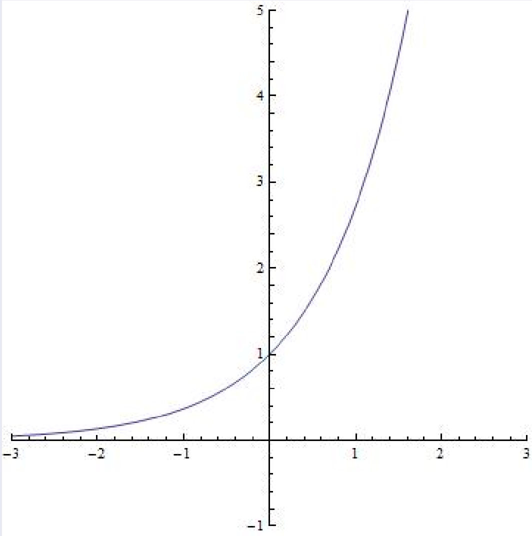
Ordo-merkintä

Huomautus

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + O(x^{n+1})$, kun $x \to 0$,
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$, kun $x \to 0$,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$, kun $x \to 0$.
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$,
- $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$, kun $x \to 0$.

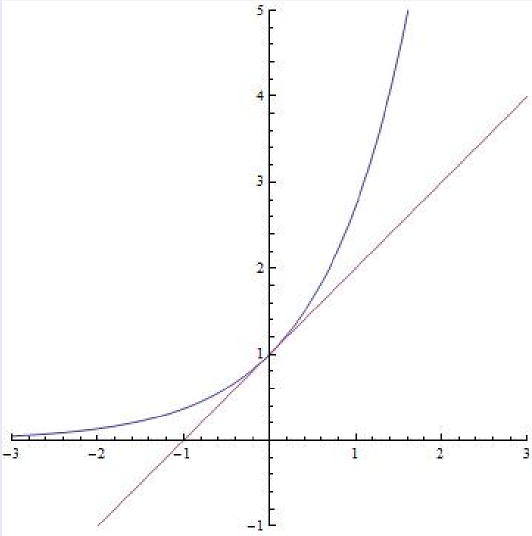
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



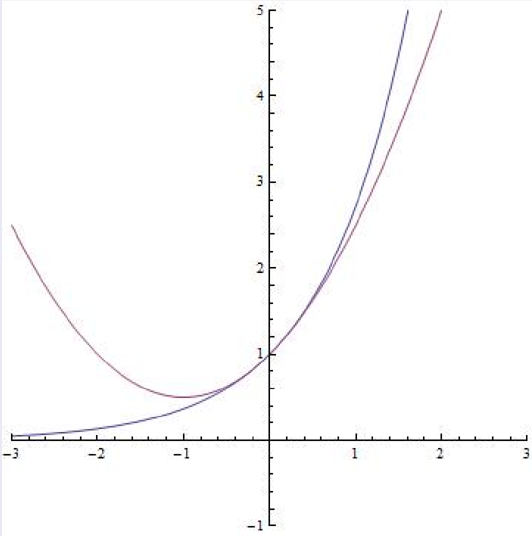
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



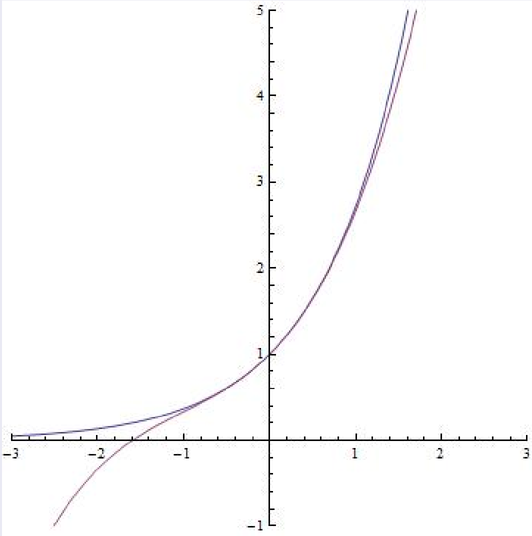
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



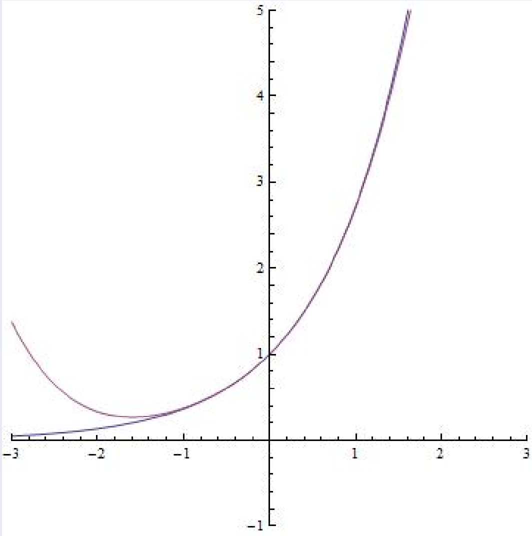
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



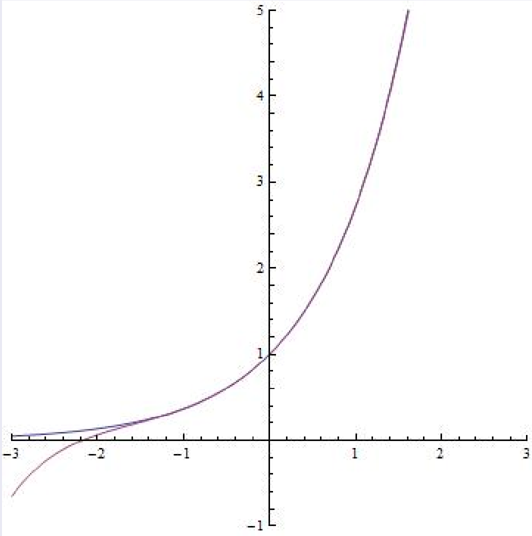
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



Ordo-merkintöjen laskusääntöjä

Olkoot m ja n ($n \leq m$) positiivisia reaalilukuja. Tällöin

- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^n)$, jos $x \to 0$
- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$, jos $x \to \infty$
- $cO(f(x)) = O(f(x))$, kun $c \in \mathbb{R}$.
- $x^n O(x^m) = O(x^{n+m})$.
- $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.
- $x^{-m} O(x^{n+m}) = O(x^n)$.
- $f(x) = O(x^{n+m}) \Rightarrow f(x) = O(x^n)$, jos $x \to 0$
- $\lim_{x \to x_0} O((x - x_0)^n) = 0$.

Ordo-merkintä

Lause

Jos on olemassa astetta n oleva polynomi $Q(x)$ jolle $f(x) = Q(x) + O((x - x_0)^{n+1})$, kun $x \to x_0$, niin $Q(x)$ on funktion f Taylorin polynomi pisteessä x_0.

Ordo-merkintä

Lause

Jos on olemassa astetta n oleva polynomi $Q(x)$ jolle $f(x) = Q(x) + O((x - x_0)^{n+1})$, kun $x \to x_0$, niin $Q(x)$ on funktion f Taylorin polynomi pisteessä x_0.

Esimerkki

Koska

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5), \quad \text{kun } x \to 0,$$

on

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^3}{6} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^4}{24} + O((-\frac{x^2}{2})^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + O(x^{10}), \quad \text{kun } x \to 0 \end{aligned}$$

Esimerkki

Koska

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + O(x^{10}), \quad \text{kun } x \to 0,$$

on yhtälön oikean puolen polynomi funktion $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ Taylorin polynomi ja siksi esim.

$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!} = \frac{1}{384} \Rightarrow f^{(8)}(0) = \frac{8!}{384} = 105.$$

Ordo-merkintä

Esimerkki

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \to 0,$$

Ordo-merkintä

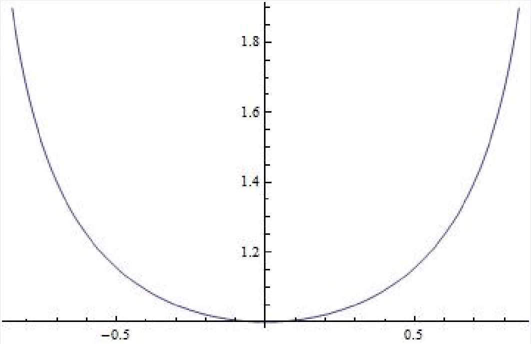
Esimerkki

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \to 0,$$

joten (sij. $\alpha = -\frac{1}{2}$, $x = -t^2$)

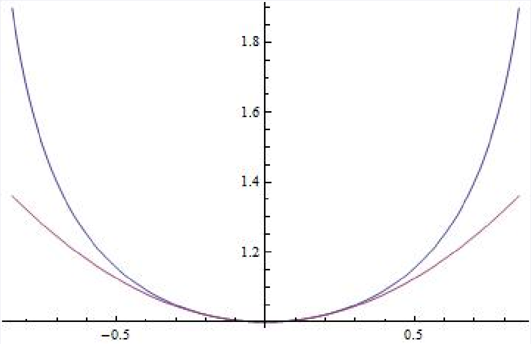
$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + O(t^6), \quad \text{kun } t \to 0.$$

Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



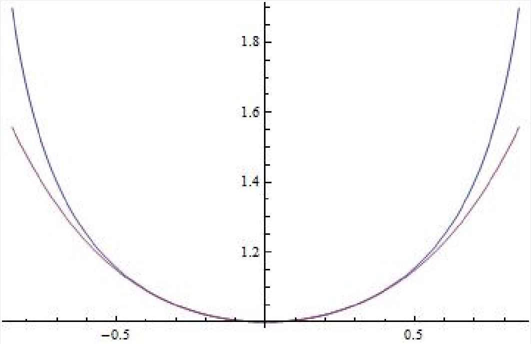
Taylorin polynomit

Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



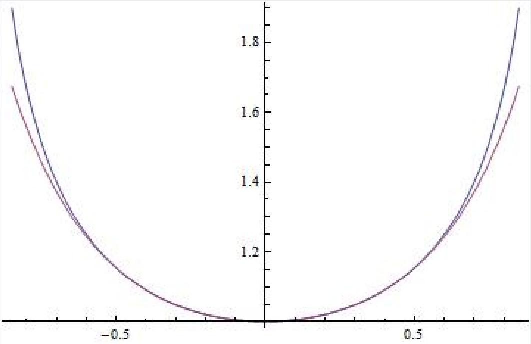
Taylorin polynomit

Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



Taylorin polynomit

Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ approksimaatioita



Esimerkki

Arvio lausekkeelle

$$E_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Esimerkki

Arvio lausekkeelle

$$E_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Esimerkki 5.49

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}.$$

Esimerkki

Arvio lausekkeelle

$$E_{\text{tot}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Esimerkki 5.49

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}.$$

Esimerkki

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^6 - 3x^7 - 5x^8}{e^{x^3} - 1 - x^3}.$$

Määritelmä (Lattiafunktio)

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Euler-Maclaurinin summakaava

Määritelmä (Lattiafunktio)

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Määritelmä

$$\sigma_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \tfrac{1}{2}$$

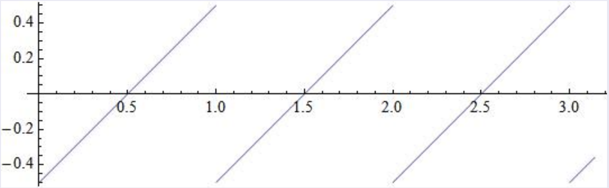
Euler-Maclaurinin summakaava

Määritelmä (Lattiafunktio)

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Määritelmä

$$\sigma_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \tfrac{1}{2}$$



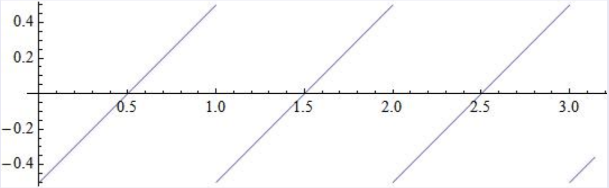
Euler-Maclaurinin summakaava

Määritelmä (Lattiafunktio)

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Määritelmä

$$\sigma_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \tfrac{1}{2}$$



Huomautus

$$\sigma_0(x+1) = \sigma_0(x) \text{ ja } \int_0^1 \sigma_0(x)\, dx = 0.$$

Euler-Maclaurinin summakaava

Lause

Jos f' on jatkuva, on

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt.$$

Euler-Maclaurinin summakaava

Lause

Jos f' on jatkuva, on

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt.$$

Huomautus

Kaava pätee myös muilla ylä- ja alarajan kokonaislukuarvoilla.

Lause

Jos f' on jatkuva, on

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt.$$

Huomautus

Kaava pätee myös muilla ylä- ja alarajan kokonaislukuarvoilla.

Huomautus

Koska $|\sigma_0(t)| \le \frac{1}{2}$, on

$$\left|\int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt\right| \le \int_1^n \left|f'(t)\sigma_0(t)\right|\,dt \le \frac{1}{2}\int_1^n \left|f'(t)\right|\,dt.$$

Huomautus

Jos f on vähenevä, on $f'(t) < 0$ ja siksi

$$\begin{aligned}
& \left| \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\, dt \right| \le \int_1^n \left| f'(t)\sigma_0(t) \right| \, dt \le \frac{1}{2} \int_1^n \left| f'(t) \right| \, dt \\
= & -\frac{1}{2} \int_1^n f'(t)\, dt = \frac{1}{2}(f(1) - f(n)).
\end{aligned}$$

Huomautus

Jos f on vähenevä, on $f'(t) < 0$ ja siksi

$$\left|\int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt\right| \le \int_1^n \left|f'(t)\sigma_0(t)\right|\,dt \le \frac{1}{2}\int_1^n \left|f'(t)\right|\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int_1^n f'(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(1) - f(n)).$$

Näin ollen

$$\left|\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)\,dt\right| \le f(1).$$

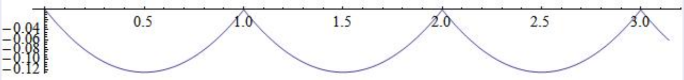
Euler-Maclaurinin summakaava

Määritelmä

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\, dt$$

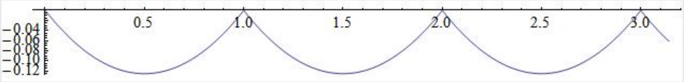
Määritelmä

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\,dt$$



Määritelmä

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\,dt$$



Huomautus

$-\frac{1}{8} \leq \sigma_1(x) \leq 0$ ja $\displaystyle\int_0^1 \sigma_1(t)\,dt = -\frac{1}{12}$

Euler-Maclaurinin summakaava

Lause

Jos f'' on jatkuva, on

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt \\ &= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) - \int_1^n f''(t)\sigma_1(t)\,dt\end{aligned}$$

Euler-Maclaurinin summakaava

Lause

Jos f'' on jatkuva, on

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt \\ &= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) - \int_1^n f''(t)\sigma_1(t)\,dt\end{aligned}$$

Huomautus

Jos $f''(t)$ on positiivinen, on

$$-\frac{1}{8}\int_1^n f''(t)\,dt \le \int_1^n f''(t)\sigma_1(t)\,dt \le 0$$