Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Kertausta

Määritelmä (Lattiafunktio)

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Kertausta

Määritelmä (Lattiafunktio)

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Määritelmä

$$\sigma_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$$

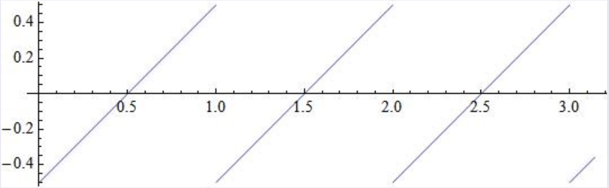
Kertausta

Määritelmä (Lattiafunktio)

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Määritelmä

$$\sigma_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$$



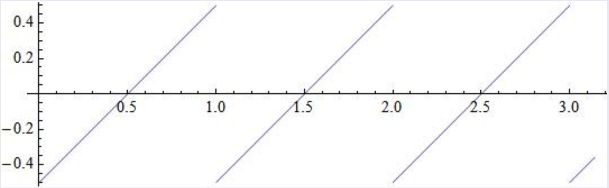
Kertausta

Määritelmä (Lattiafunktio)

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}.$$

Määritelmä

$$\sigma_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$$



Huomautus

$$\sigma_0(x+1) = \sigma_0(x) \text{ ja } \int_0^1 \sigma_0(x)\, dx = 0.$$

Kertausta: Euler-Maclaurinin summakaava

Lause

Jos f' on jatkuva, on

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt.$$

Kertausta: Euler-Maclaurinin summakaava

Lause

Jos f' on jatkuva, on

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt.$$

Huomautus

Kaava pätee myös muilla ylä- ja alarajan kokonaislukuarvoilla.

Kertausta: Euler-Maclaurinin summakaava

Lause

Jos f' on jatkuva, on

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt.$$

Huomautus

Kaava pätee myös muilla ylä- ja alarajan kokonaislukuarvoilla.

Huomautus

Koska $|\sigma_0(t)| \leq \frac{1}{2}$, on

$$\left|\int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt\right| \leq \int_1^n \left|f'(t)\sigma_0(t)\right|\,dt \leq \frac{1}{2}\int_1^n \left|f'(t)\right|\,dt.$$

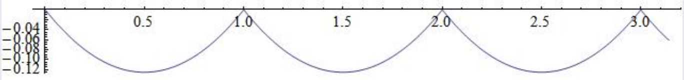
Määritelmä

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\, dt$$

Kertausta: Euler-Maclaurinin summakaava

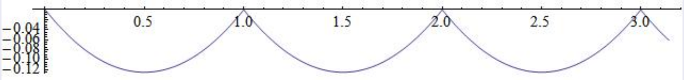
Määritelmä

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\,dt$$



Määritelmä

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t)\,dt$$



Huomautus

$-\frac{1}{8} \leq \sigma_1(x) \leq 0$ ja $\displaystyle\int_0^1 \sigma_1(t)\,dt = -\frac{1}{12}$

Kertausta: Euler-Maclaurinin summakaava

Lause

Jos f'' on jatkuva, on

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt \\ &= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) - \int_1^n f''(t)\sigma_1(t)\,dt\end{aligned}$$

Kertausta: Euler-Maclaurinin summakaava

Lause

Jos f'' on jatkuva, on

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt$$
$$= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) - \int_1^n f''(t)\sigma_1(t)\,dt$$

Huomautus

Jos $f''(t)$ on positiivinen, on

$$-\frac{1}{8}\int_1^n f''(t)\,dt \le \int_1^n f''(t)\sigma_1(t)\,dt \le 0$$

Esimerkki

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

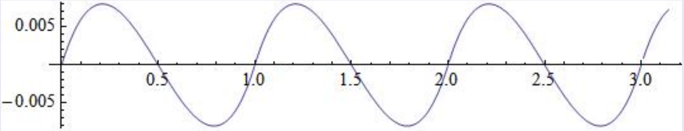
Euler-Maclaurinin summakaava

Esimerkki

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Määritelmä

$$\sigma_2(x) = \int_0^x \left(\sigma_1(t) + \frac{1}{12}\right) dt$$

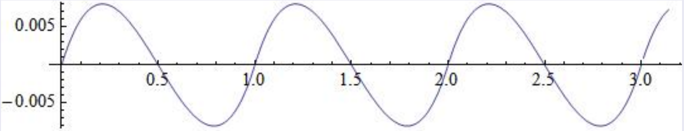


Esimerkki

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Määritelmä

$$\sigma_2(x) = \int_0^x (\sigma_1(t) + \frac{1}{12})\, dt$$



Huomautus

$$|\sigma_2(x)| \leq 0.00801875, \int_0^1 \sigma_2(t)\, dt = 0.$$

Lause

Jos f''' on jatkuva, on

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(k) &= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n f'(t)\sigma_0(t)\,dt \\
&= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) - \int_1^n f''(t)\sigma_1(t)\,dt \\
&= \int_1^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(1)) \\
&+ \int_1^n f'''(n)\sigma_2(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Stirlingin kaava

Lause

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + O(\frac{1}{n})\right),$$

kun $n \to \infty$.

Stirlingin kaava

Todistus

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

Todistus

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

$$= \int_1^n \ln t\, dt + \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln n) + \int_1^n \frac{1}{t^2}\sigma_1(t)\, dt$$

Todistus

$$
\begin{aligned}
\ln n! &= \sum_{k=1}^{n} \ln k \\
&= \int_1^n \ln t\, dt + \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln n) + \int_1^n \frac{1}{t^2}\sigma_1(t)\, dt \\
&= n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\sigma_1(t)\, dt - \int_n^\infty \frac{1}{t^2}\sigma_1(t)\, dt
\end{aligned}
$$

Todistus

$$
\begin{aligned}
\ln n! &= \sum_{k=1}^{n} \ln k \\
&= \int_1^n \ln t \, dt + \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln n) + \int_1^n \frac{1}{t^2}\sigma_1(t)\, dt \\
&= n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2} \ln n + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\sigma_1(t)\, dt - \int_n^\infty \frac{1}{t^2}\sigma_1(t)\, dt \\
&= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + C + g(n),
\end{aligned}
$$

missä $C = 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\sigma_1(t)\, dt$ ja $0 \leq g(n) \leq \frac{1}{8n}$.

Stirlingin kaava

Todistus

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + C + g(n),$$

josta

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^C (1 + O(\frac{1}{n})).$$

Stirlingin kaava

Todistus

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + C + g(n),$$

josta

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^C (1 + O(\frac{1}{n})).$$

Väite: $e^C = \sqrt{2\pi}$, kun $C = 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2} \sigma_1(t)\, dt$.

Stirlingin kaava

Huomautus

Jos $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$, on $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ja siksi

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Huomautus

Jos $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$, on $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ja siksi

$$
\begin{aligned}
I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-2}{2k-2} \cdots \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Huomautus

Jos $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$, on $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ja siksi

$$\begin{aligned}
I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-2}{2k-2} \cdots \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Huomautus

Jos $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$, on $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ja siksi

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-2}{2k-2} \cdots \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Samoin

$$I_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)(2k)!}.$$

Huomautus

Kertolaskulla saadaan yhtälöt

$$I_{2k} I_{2k+1} = \frac{\pi}{2(2k+1)}$$

Huomautus

Kertolaskulla saadaan yhtälöt

$$I_{2k} I_{2k+1} = \frac{\pi}{2(2k+1)}$$

ja

$$I_{2k-1} I_{2k} = \frac{\pi}{2k}.$$

Huomautus

Kertolaskulla saadaan yhtälöt

$$I_{2k}I_{2k+1} = \frac{\pi}{2(2k+1)}$$

ja

$$I_{2k-1}I_{2k} = \frac{\pi}{2k}.$$

Koska $I_{n+1} \leq I_n$, on selvästikin

$$I_{2k}I_{2k+1} \leq I_{2k}^2 \leq I_{2k}I_{2k-1}.$$

Huomautus

Kertolaskulla saadaan yhtälöt

$$I_{2k}I_{2k+1} = \frac{\pi}{2(2k+1)}$$

ja

$$I_{2k-1}I_{2k} = \frac{\pi}{2k}.$$

Koska $I_{n+1} \leq I_n$, on selvästikin

$$I_{2k}I_{2k+1} \leq I_{2k}^2 \leq I_{2k}I_{2k-1}.$$

Näin ollen (Wallisin epäyhtälö)

$$\frac{\pi}{2(2k+1)} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{(2k!)}{2^{2k}(k!)^2}\right)^2 \leq \frac{\pi}{4k}.$$

Seuraus

Olkoon

$$C = 1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\sigma_1(t)\,dt.$$

Tällöin $e^C = \sqrt{2\pi}$.