

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Differentiaaliyhtälöt (DY:t)

Määritelmä

Differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

missä F on lauseke, joka sisältää muuttujan t , tuntemattoman funktion $y = y(t)$ sekä tämän yhden- tai useammankertaisia derivaattoja y' , y'' ..., $y^{(n)}$.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

missä F on lauseke, joka sisältää muuttujan t , tuntemattoman funktion $y = y(t)$ sekä tämän yhden- tai useammankertaisia derivaattoja y' , y'' ..., $y^{(n)}$. Lukua n kutsutaan differentiaaliyhtälön *kertaluvuksi*.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälön ratkaisun kuvaajaa kutsutaan *integraalikäyräksi*.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälön ratkaisun kuvaajaa kutsutaan *integraalikäyräksi*. Yleensä integraalikäyriä on ääretön määrä, mutta yksikäsitteiseen ratkaisuun voidaan päätyä *reunaehdoilla* $y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n)}(0) = c_n$.

Määritelmä

Differentiaaliyhtälön ratkaisun kuvaajaa kutsutaan *integraalikäyräksi*. Yleensä integraalikäyriä on ääretön määrä, mutta yksikäsitteiseen ratkaisuun voidaan päätyä *reunaehdoilla* $y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n)}(0) = c_n$.

Esimerkki 8.1.

$$2y'^2 + xy' - y = 0$$

Määritelmä

Muotoa

$$y^{(n)}(t) = f(t)$$

oleva differentiaaliyhtälö on yksinkertainen.

Määritelmä

Muotoa

$$y^{(n)}(t) = f(t)$$

oleva differentiaaliyhtälö on yksinkertainen. Yksinkertaisen DY:n ratkaiseminen on integrointitehtävä.

Määritelmä

Muotoa

$$y^{(n)}(t) = f(t)$$

oleva differentiaaliyhtälö on yksinkertainen. Yksinkertaisen DY:n ratkaiseminen on integrointitehtävä.

Esimerkki

$$y'' = 6x$$

Yksinkertaiset DY:t

Esimerkki

- Yksiulotteinen liike tarkoittaa kappaleen liikettä yhtä koordinaattiakselia pitkin.

Esimerkki

- Yksiulotteinen liike tarkoittaa kappaleen liikettä yhtä koordinaattiakselia pitkin.
- Olkoon paikka ajanhetkellä t $s(t)$.

Esimerkki

- Yksiulotteinen liike tarkoittaa kappaleen liikettä yhtä koordinaattiakselia pitkin.
- Olkoon paikka ajanhetkellä t $s(t)$.
- Kappaleen nopeus on $v(t) = s'(t)$.

Esimerkki

- Yksiulotteinen liike tarkoittaa kappaleen liikettä yhtä koordinaattiakselia pitkin.
- Olkoon paikka ajanhetkellä t $s(t)$.
- Kappaleen nopeus on $v(t) = s'(t)$.
- Kappaleen kiihtyvyys on $a(t) = v'(t)$.

Esimerkki

- Yksiulotteinen liike tarkoittaa kappaleen liikettä yhtä koordinaattiakselia pitkin.
- Olkoon paikka ajanhetkellä t $s(t)$.
- Kappaleen nopeus on $v(t) = s'(t)$.
- Kappaleen kiihtyvyys on $a(t) = v'(t)$.
- Tasaisesti kiihtyvä liike: $a(t) = a$ (vakio).

Esimerkki

- Yksiulotteinen liike tarkoittaa kappaleen liikettä yhtä koordinaattiakselia pitkin.
- Olkoon paikka ajanhetkellä t $s(t)$.
- Kappaleen nopeus on $v(t) = s'(t)$.
- Kappaleen kiihtyvyys on $a(t) = v'(t)$.
- Tasaisesti kiihtyvä liike: $a(t) = a$ (vakio).
- Tällöin $s''(t) = v'(t) = a(t) = a$.

Hamiltonin mekaniikka

Olkoon kappaleen liike-energia $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ ja potentiaalienergia

$$E_{pot} = V(x) = - \int_{x_0}^x F(s) ds.$$

Hamiltonin mekaniikka

Olkoon kappaleen liike-energia $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ ja potentiaalienergia

$E_{pot} = V(x) = - \int_{x_0}^x F(s) ds$. Newtonin liikeyhtälön mukaan

$F = ma = m \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}p$, missä $p = mv$ on kappaleen liikemäärä.

Hamiltonin mekaniikka

Olkoon kappaleen liike-energia $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ ja potentiaalienergia

$E_{pot} = V(x) = - \int_{x_0}^x F(s) ds$. Newtonin liikeyhtälön mukaan

$F = ma = m \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}p$, missä $p = mv$ on kappaleen liikemäärä.

Kappaleen kokonaisenergia on $H = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ ja

$$\frac{\partial}{\partial x}H = V'(x) = -F(x) = -\frac{d}{dt}p$$

Hamiltonin mekaniikka

Olkoon kappaleen liike-energia $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ ja potentiaalienergia

$E_{pot} = V(x) = - \int_{x_0}^x F(s) ds$. Newtonin liikeyhtälön mukaan

$F = ma = m \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}p$, missä $p = mv$ on kappaleen liikemäärä.

Kappaleen kokonaisenergia on $H = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ ja

$$\frac{\partial}{\partial x}H = V'(x) = -F(x) = -\frac{d}{dt}p$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial p}H = \frac{p}{m} = v = \frac{d}{dt}x.$$

Hamiltonin mekaniikka

DY-pari

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x &= \frac{\partial}{\partial p}H \\ \frac{d}{dt}p &= -\frac{\partial}{\partial x}H \end{cases}$$

tunnetaan nimellä Hamiltonin differentiaaliyhtälöt.

Esimerkki

Radioaktiivisen hajoamisen DY

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

ei ole yksinkertainen,

Esimerkki

Radioaktiivisen hajoamisen DY

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

ei ole yksinkertainen, mutta sen ekvivalentti muoto

$$\frac{d}{dt} \ln N(t) = -\lambda$$

on.

Differentiaaliyhtälöiden muodostamisesta

Periaatteet

- Jos $f(x) = kx + b$ on suora, on
$$f(x) + k = kx + b + k = k(x + 1) + b = f(x + 1).$$

Periaatteet

- Jos $f(x) = kx + b$ on suora, on
 $f(x) + k = kx + b + k = k(x + 1) + b = f(x + 1)$.
- Kulmakerroin k vastaa siis kasvua y -koordinaatin suunnassa kun x kasvaa 1:n verran.

Periaatteet

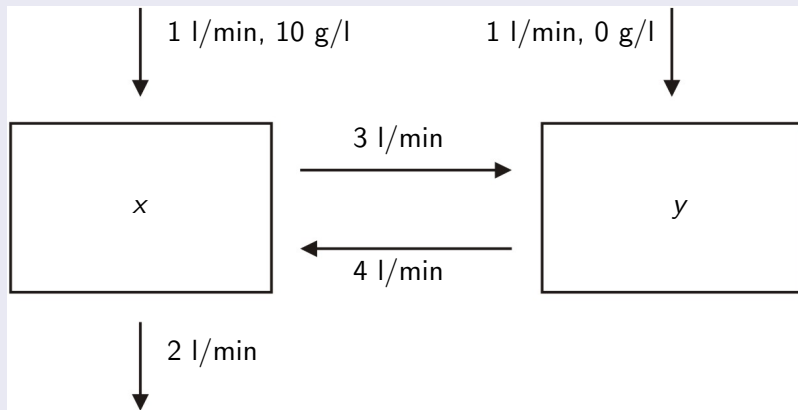
- Jos $f(x) = kx + b$ on suora, on
 $f(x) + k = kx + b + k = k(x + 1) + b = f(x + 1)$.
- Kulmakerroin k vastaa siis kasvua y -koordinaatin suunnassa kun x kasvaa 1:n verran.
- Yleisesti $f'(x)$ esittää käyrän tangentin kulmakerrointa, ts. käyrän hetkellistä kasvunopeutta.

Periaatteet

- Jos $f(x) = kx + b$ on suora, on
 $f(x) + k = kx + b + k = k(x + 1) + b = f(x + 1)$.
- Kulmakerroin k vastaa siis kasvua y -koordinaatin suunnassa kun x kasvaa 1:n verran.
- Yleisesti $f'(x)$ esittää käyrän tangentin kulmakerrointa, ts. käyrän hetkellistä kasvunopeutta.
- Ajasta riippuvaa suuretta esittävän funktion $f(t)$ derivaatta $f'(t)$ esittää suureen muutosnopeutta.

Esimerkki

Säiliöiden tilavuus 20 l, alkuehdot $x(0) = y(0) = 10$ (grammoina)



Esimerkki

Esimerkki 8.4. (Ketjukäyrä)

Määritelmä

Muotoa $y' = f(x)g(y)$ oleva differentiaaliyhtälö on *separoituva*.

Määritelmä

Muotoa $y' = f(x)g(y)$ oleva differentiaaliyhtälö on *separoituva*.

Separoituvan DY:n ratkaisu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Määritelmä

Muotoa $y' = f(x)g(y)$ oleva differentiaaliyhtälö on *separoituva*.

Separoituvan DY:n ratkaisu

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy &= f(x) dx\end{aligned}$$

Määritelmä

Muotoa $y' = f(x)g(y)$ oleva differentiaaliyhtälö on *separoituva*.

Separoituvan DY:n ratkaisu

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy &= f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int f(x) dx + C\end{aligned}$$

Määritelmä

Muotoa $y' = f(x)g(y)$ oleva differentiaaliyhtälö on *separoituva*.

Separoituvan DY:n ratkaisu

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy &= f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int f(x) dx + C\end{aligned}$$

Esimerkkejä

Esimerkit 8.2., 8.3. ja 8.4. (ratkaisu)

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$y' + ay = 0$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$\begin{aligned} y' + ay &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{y'}{y} &= -a \end{aligned}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$y' + ay = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln y = -a$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$y' + ay = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln y = -a$$

$$\Leftrightarrow \ln y = - \int a(x) dx + C_0$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$y' + ay = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln y = -a$$

$$\Leftrightarrow \ln y = - \int a(x) dx + C_0$$

$$\Leftrightarrow y = e^{C_0} \underbrace{e^{- \int a(x) dx}}_{y_H}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$\begin{aligned} y' + ay &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{y'}{y} &= -a \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln y &= -a \\ \Leftrightarrow \ln y &= - \int a(x) dx + C_0 \\ \Leftrightarrow y &= e^{C_0} \underbrace{e^{- \int a(x) dx}}_{y_H} = C y_H \end{aligned}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$.

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y'_H$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$C'y_H + Cy'_H + aCy_H = b$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy_H' + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + C \underbrace{(y_H' + ay_H)}_{=0} &= b \end{aligned}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy_H' + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + C \underbrace{(y_H' + ay_H)}_{=0} &= b \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow C'y_H = b$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy_H' + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + C \underbrace{(y_H' + ay_H)}_{=0} &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H = b &\Leftrightarrow C' = \frac{b}{y_H}. \end{aligned}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy_H' + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + C(\underbrace{y_H' + ay_H}_{=0}) &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H = b &\Leftrightarrow C' = \frac{b}{y_H}. \end{aligned}$$

- Tästä $C(x) = \int \frac{b(x)}{y_H(x)} dx + C$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y'_H$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy'_H + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + C(\underbrace{y'_H + ay_H}_{=0}) &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H = b &\Leftrightarrow C' = \frac{b}{y_H}. \end{aligned}$$

- Tästä $C(x) = \int \frac{b(x)}{y_H(x)} dx + C$ ja
 $y(x) = Cy_H + y_H \int \frac{b(x)}{y_H(x)} dx$

Esimerkki 8.5.

$$y' - y = x^2 + x$$