

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Määritelmä

Muotoa $y' = f(x)g(y)$ oleva differentiaaliyhtälö on *separoituva*.

Määritelmä

Muotoa $y' = f(x)g(y)$ oleva differentiaaliyhtälö on *separoituva*.

Separoituvan DY:n ratkaisu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Määritelmä

Muotoa $y' = f(x)g(y)$ oleva differentiaaliyhtälö on *separoituva*.

Separoituvan DY:n ratkaisu

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy &= f(x) dx\end{aligned}$$

Määritelmä

Muotoa $y' = f(x)g(y)$ oleva differentiaaliyhtälö on *separoituva*.

Separoituvan DY:n ratkaisu

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy &= f(x) dx \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy &= \int f(x) dx + C\end{aligned}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$y' + ay = 0$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$\begin{aligned} y' + ay &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{y'}{y} &= -a \end{aligned}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$y' + ay = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln y = -a$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$y' + ay = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln y = -a$$

$$\Leftrightarrow \ln y = - \int a(x) dx + C_0$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$\begin{aligned} y' + ay &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{y'}{y} &= -a \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln y &= -a \\ \Leftrightarrow \ln y &= - \int a(x) dx + C_0 \\ \Leftrightarrow y &= e^{C_0} \underbrace{e^{- \int a(x) dx}}_{y_H} \end{aligned}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Vaihe 1: Homogeeninen DY

$$y' + ay = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln y = -a$$

$$\Leftrightarrow \ln y = - \int a(x) dx + C_0$$

$$\Leftrightarrow y = e^{C_0} \underbrace{e^{- \int a(x) dx}}_{y_H} = C y_H$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$.

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$C'y_H + Cy_H' + aCy_H = b$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy_H' + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + \underbrace{C(y_H' + ay_H)}_{=0} &= b \end{aligned}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y'_H$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy'_H + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + C(\underbrace{y'_H + ay_H}_{=0}) &= b \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow C'y_H = b$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y'_H$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy'_H + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + C \underbrace{(y'_H + ay_H)}_{=0} &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H = b \Leftrightarrow C' &= \frac{b}{y_H}. \end{aligned}$$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y_H'$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy_H' + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + C(\underbrace{y_H' + ay_H}_{=0}) &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H = b &\Leftrightarrow C' = \frac{b}{y_H}. \end{aligned}$$

- Tästä $C(x) = \int \frac{b(x)}{y_H(x)} dx + C$

1. kertaluvun lineaarinen DY

Vaihe 2: Vakion variointi

- Yrite: $y = C(x)y_H$, josta $y' = C'(x)y_H + C(x)y'_H$.
- Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} C'y_H + Cy'_H + aCy_H &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H + C(\underbrace{y'_H + ay_H}_{=0}) &= b \\ \Leftrightarrow C'y_H = b &\Leftrightarrow C' = \frac{b}{y_H}. \end{aligned}$$

- Tästä $C(x) = \int \frac{b(x)}{y_H(x)} dx + C$ ja
$$y(x) = Cy_H + y_H \int \frac{b(x)}{y_H(x)} dx$$

Esimerkki 8.5.

$$y' - y = x^2 + x$$

Vakiokertoimet

Yhtälön

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

ratkaisustrategia:

Vakiokertoimet

Yhtälön

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

ratkaisustrategia:

- Etsitään kaikki homogeenisen yhtälön

$$y'' + ay' + by = 0$$

ratkaisut.

Vakiokertoimet

Yhtälön

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

ratkaisustrategia:

- Etsitään kaikki homogeenisen yhtälön

$$y'' + ay' + by = 0$$

ratkaisut.

- Etsitään jokin yksittäinen ratkaisu y_0 alkuperäiselle yhtälölle.

Vakiokertoimet

Yhtälön

$$y'' + ay' + by = f(t)$$

ratkaisustrategia:

- Etsitään kaikki homogeenisen yhtälön

$$y'' + ay' + by = 0$$

ratkaisut.

- Etsitään jokin yksittäinen ratkaisu y_0 alkuperäiselle yhtälölle.
- Alkuperäisen yhtälön ratkaisut saadaan homogeenisen DY:n ratkaisuista lisäämällä näihin y_0 .

Homogeeninen vakiokertoiminen 2. kl. lin. DY

Yhtälö

$$y'' + ay' + by = 0$$

voidaan aina ratkaista yritteellä $y = e^{\lambda x}$.

Homogeeninen vakiokertoiminen 2. kl. lin. DY

Yhtälö

$$y'' + ay' + by = 0$$

voidaan aina ratkaista yritteellä $y = e^{\lambda x}$.

Luvun λ arvot saadaan differentiaaliyhtälön *karakteristinen yhtälön* $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ratkaisuina.

Huomautus

- Homogeeniselle differentiaaliyhtälölle on löydettävä kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.

Huomautus

- Homogeeniselle differentiaaliyhtälölle on löydettävä kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.
- Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta nollakohtaa $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ovat funktiot $e^{\lambda_1 x}$ ja $e^{\lambda_2 x}$ lineaarisesti riippumattomat.

Huomautus

- Homogeeniselle differentiaaliyhtälölle on löydettävä kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.
- Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta nollakohtaa $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ovat funktiot $e^{\lambda_1 x}$ ja $e^{\lambda_2 x}$ lineaarisesti riippumattomat.
- Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksinkertainen juuri λ , ovat funktiot $e^{\lambda x}$ ja $x e^{\lambda x}$ lineaarisesti riippumattomat.

Huomautus

- Homogeeniselle differentiaaliyhtälölle on löydettävä kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.
- Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta nollakohtaa $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ovat funktiot $e^{\lambda_1 x}$ ja $e^{\lambda_2 x}$ lineaarisesti riippumattomat.
- Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksinkertainen juuri λ , ovat funktiot $e^{\lambda x}$ ja $x e^{\lambda x}$ lineaarisesti riippumattomat.
- Jos karakteristisen yhtälön nollakohdat λ_1 ja λ_2 ovat kompleksisia, voidaan reaalisiin ratkaisuihin palata Eulerin kaavoihin nojautuen: Perusratkaisujen $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ja $e^{(\alpha-i\beta)x}$ sijaan voidaan käyttää ratkaisuja $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ja $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$.

Huomautus

- Homogeeniselle differentiaaliyhtälölle on löydettävä kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.
- Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksi erisuurta nollakohtaa $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ovat funktiot $e^{\lambda_1 x}$ ja $e^{\lambda_2 x}$ lineaarisesti riippumattomat.
- Jos karakteristisella yhtälöllä on kaksinkertainen juuri λ , ovat funktiot $e^{\lambda x}$ ja $x e^{\lambda x}$ lineaarisesti riippumattomat.
- Jos karakteristisen yhtälön nollakohdat λ_1 ja λ_2 ovat kompleksisia, voidaan reaalisiin ratkaisuihin palata Eulerin kaavoihin nojautuen: Perusratkaisujen $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ja $e^{(\alpha-i\beta)x}$ sijaan voidaan käyttää ratkaisuja $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ ja $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$.

Esimerkkejä

Esimerkit 8.6–8.10.

Yksittäisratkaisun etsimisestä

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

- Jos $f(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.

Yksittäisratkaisun etsimisestä

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

- Jos $f(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.
- Jos $f(x) = ae^{kx}$ (tai $a \cos kx$ tai $a \sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).

Yksittäisratkaisun etsimisestä

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

- Jos $f(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.
- Jos $f(x) = ae^{kx}$ (tai $a \cos kx$ tai $a \sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).
- Jos f on edellämainittujen tulo, yritä samanmuotoista ratkaisua.

Yksittäisratkaisun etsimisestä

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

- Jos $f(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.
- Jos $f(x) = ae^{kx}$ (tai $a \cos kx$ tai $a \sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).
- Jos f on edellämainittujen tulo, yritä samanmuotoista ratkaisua.
- Jos f on edellämainittujen summa, tee yrite jokaiselle summattavalle erikseen.

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

- Jos $f(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.
- Jos $f(x) = ae^{kx}$ (tai $a \cos kx$ tai $a \sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).
- Jos f on edellämainittujen tulo, yritä samanmuotoista ratkaisua.
- Jos f on edellämainittujen summa, tee yrite jokaiselle summattavalle erikseen.
- Jos yrite sisältää termin, joka on homogeenisen DY:n ratkaisu, kerro se muuttujalla. Toista tarpeen vaatiessa.

Yksittäisratkaisun etsimisestä

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

- Jos $f(x)$ on astetta n oleva polynomi, yritä astetta n olevaa polynomia.
- Jos $f(x) = ae^{kx}$ (tai $a \cos kx$ tai $a \sin kx$), yritä ratkaisua $y = Ae^{kx}$ (tai $A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$).
- Jos f on edellämainittujen tulo, yritä samanmuotoista ratkaisua.
- Jos f on edellämainittujen summa, tee yrite jokaiselle summattavalle erikseen.
- Jos yrite sisältää termin, joka on homogeenisen DY:n ratkaisu, kerro se muuttujalla. Toista tarpeen vaatiessa.

Esimerkkejä

Esimerkit 8.11–8.12.