

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Suorat avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora L on yksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka.

Suorat avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora L on yksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset vektorit $\mathbf{s}$ (suuntavektori) ja $\mathbf{r}$ (paikkavektori), että

$$L = \{\mathbf{r} + t\mathbf{s} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Suorat avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora L on yksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset vektorit $\mathbf{s}$ (suuntavektori) ja $\mathbf{r}$ (paikkavektori), että

$$L = \{\mathbf{r} + t\mathbf{s} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Suoran esityksiä

- Parametriesitys

Suorat avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ suora L on yksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset vektorit $\mathbf{s}$ (suuntavektori) ja $\mathbf{r}$ (paikkavektori), että

$$L = \{\mathbf{r} + t\mathbf{s} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Suoran esityksiä

- Parametriesitys
- Standardiesitys (koordinaattimuoto)

Tasot avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso T on kaksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka.

Tasot avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso T on kaksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset riippumattomat vektorit $\mathbf{s}_1$ ja $\mathbf{s}_2$ (suuntavektorit) ja $\mathbf{r}$ (paikkavektori), että

$$L = \{\mathbf{r} + t_1\mathbf{s}_1 + t_2\mathbf{s}_2 \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Tasot avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso T on kaksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset riippumattomat vektorit $\mathbf{s}_1$ ja $\mathbf{s}_2$ (suuntavektorit) ja $\mathbf{r}$ (paikkavektori), että

$$L = \{\mathbf{r} + t_1\mathbf{s}_1 + t_2\mathbf{s}_2 \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Tason esityksiä

- Parametriesitys

Tasot avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso T on kaksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset riippumattomat vektorit $\mathbf{s}_1$ ja $\mathbf{s}_2$ (suuntavektorit) ja $\mathbf{r}$ (paikkavektori), että

$$L = \{\mathbf{r} + t_1\mathbf{s}_1 + t_2\mathbf{s}_2 \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Tason esityksiä

- Parametriesitys
- Normaaliesitys

Tasot avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso T on kaksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset riippumattomat vektorit $\mathbf{s}_1$ ja $\mathbf{s}_2$ (suuntavektorit) ja $\mathbf{r}$ (paikkavektori), että

$$L = \{\mathbf{r} + t_1\mathbf{s}_1 + t_2\mathbf{s}_2 \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Tason esityksiä

- Parametriesitys
- Normaaliesitys
- Standardiesitys (koordinaattimuoto)

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Tasot avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Määritelmä: Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso T on kaksiulotteisen aliavaruuden sivuluokka. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset riippumattomat vektorit $\mathbf{s}_1$ ja $\mathbf{s}_2$ (suuntavektorit) ja $\mathbf{r}$ (paikkavektori), että

$$L = \{\mathbf{r} + t_1\mathbf{s}_1 + t_2\mathbf{s}_2 \mid (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Tason esityksiä

- Parametriesitys
- Normaaliesitys
- Standardiesitys (koordinaattimuoto)

Esimerkki

Esimerkki 6.1.

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$
- Jatkuva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ määrittelee käyrän avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$
- Jatkuva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ määrittelee käyrän avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ esittää kolmiulotteisen avaruuden skalaarisuuretta

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Usean muuttujan funktiot

- Määritellään funktioina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- Voidaan jakaa komponenttifunktioiksi $f = (f_1, \dots, f_m)$, jossa jokainen f_i on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Esimerkkejä

- Napakoordinaattimuunnos $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- Pallokoordinaattimuunnos
 $f(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$
- Jatkuva $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$
- Jatkuva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ määrittelee käyrän avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ esittää kolmiulotteisen avaruuden skalaarisuuretta
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ esittää kolmiulotteisen avaruuden vektorisuuretta (vektorikenttä)

Peruskäsitteitä

- Etäisyys $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

Peruskäsitteitä

- Etäisyys $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
- Raja-arvo $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ kuten reaalifunktioilla.

Peruskäsitteitä

- Etäisyys $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
- Raja-arvo $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ kuten reaalifunktioilla.
- Jatkuvuus kuten reaalifunktioilla: $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) < \epsilon$, kunhan $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta_\epsilon$.

Osittaisderivaatta

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta i :nnen muuttujan x_i suhteen pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Osittaisderivaatta

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta i :nnen muuttujan x_i suhteen pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Muut merkinnät: $f_{x_i}(\mathbf{a})$ ja $D_{x_i}f(\mathbf{a})$. Jos muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ järjestys on kiinnitetty, niin myös merkintää $D_i f(\mathbf{a})$ käytetään.

Osittaisderivaatta

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ osittaisderivaatta i :nnen muuttujan x_i suhteen pisteessä $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

Muut merkinnät: $f_{x_i}(\mathbf{a})$ ja $D_{x_i}f(\mathbf{a})$. Jos muuttujien $x_1, x_2, \dots, x_n$ järjestys on kiinnitetty, niin myös merkintää $D_i f(\mathbf{a})$ käytetään.

Lause

Jos toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, niin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Esimerkki 6.2.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{jos } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Osittaisderivaatat ja jatkuvuus origossa?

Määritelmä (reaalifunktion derivoituvuus)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä x , jos on olemassa sellainen vakio $k_x \in \mathbb{R}$, että

$$f(x + h) - f(x) = k_x h + h\epsilon(h),$$

missä $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \epsilon(0) = 0$.

Määritelmä (reaalifunktion derivoituvuus)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä x , jos on olemassa sellainen vakio $k_x \in \mathbb{R}$, että

$$f(x+h) - f(x) = k_x h + h\epsilon(h),$$

missä $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \epsilon(0) = 0$.

Määritelmä

Edellisen määritelmän lukua k_x sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $f'(x)$, $Df(x)$ tai $\frac{d}{dx}f(x)$.

Määritelmä (differentioituvuus)

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = T\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Määritelmä (differentioituvuus)

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = T\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Edellisen määritelmän mukaista lineaarikuvausta T sanotaan funktion f Fréchet'n derivaataksi pisteessä $\mathbf{x}$ ja merkitään $Df(\mathbf{x})$.

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Määritelmä (differentioituvuus)

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = T\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Edellisen määritelmän mukaista lineaarikuvausta T sanotaan funktion f Fréchet'n derivaataksi pisteessä $\mathbf{x}$ ja merkitään $Df(\mathbf{x})$. Lineaarikuvausten $Df(\mathbf{x})$ matriisia sanotaan Jacobin matriisiksi ja siitä käytetään merkintää $J_f(\mathbf{x})$.

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa

Määritelmä (differentioituvuus)

Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jos

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = T\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}),$$

missä $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus ja $\epsilon(\mathbf{h}) \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Edellisen määritelmän mukaista lineaarikuvausta T sanotaan funktion f Fréchet'n derivaataksi pisteessä $\mathbf{x}$ ja merkitään $Df(\mathbf{x})$. Lineaarikuvausten $Df(\mathbf{x})$ matriisia sanotaan Jacobin matriisiksi ja siitä käytetään merkintää $J_f(\mathbf{x})$.

Lause

$$J_f(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

Erikoistapaus

Lineaarikuvaus $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on muotoa

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}.$$

Määritelmä

Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Jacobin matriisia $(1 \times n)$ sanotaan *gradientiksi* ja merkitään $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

Määritelmä

Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Jacobin matriisia $(1 \times n)$ sanotaan *gradientiksi* ja merkitään $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

Huomautus

Differentioituvalle funktiolle $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \epsilon(\mathbf{h}),$$

joten

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \approx \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h},$$

kun $\|\mathbf{h}\|$ on pieni.

Esimerkki 6.8.

Pinnan $z = f(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ tangenttitaso pisteessä $(2, 3, 6)$.

Esimerkki 6.8.

Pinnan $z = f(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ tangenttitaso pisteessä $(2, 3, 6)$.

Tangenttitason yhtälö yleisesti

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - a)$$

Huomautus

Funktiolle $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ on

$$J_f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Huomautus

Funktiolle $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ on

$$J_f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Kokonaisdifferentiaali

- Merkitään $\mathbf{dx} = (dx_1, \dots, dx_n)$

Huomautus

Funktiolle $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ on

$$J_f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Kokonaisdifferentiaali

- Merkitään $\mathbf{dx} = (dx_1, \dots, dx_n)$
- $f(\mathbf{x} + \mathbf{dx}) - f(\mathbf{x}) \approx \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n$

Huomautus

Funktiolle $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ on

$$J_f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Kokonaisdifferentiaali

- Merkitään $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$
- $f(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \approx \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$
- Muutoksen $f(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$ lineaarista approksimaatiota

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

sanotaan kokonaisdifferentiaaliksi.

Esimerkki 6.9.

- Suorakulmaisen kolmion kateettien muutokset ovat $8 \rightarrow 8,1$ ja $6 \rightarrow 5,8$. Paljonko hypotenuusa muuttuu?

Ketjusääntö

$D(g \circ f) ?$

Ketjusääntö

$D(g \circ f) ?$

$$g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - g(f(\mathbf{x}))$$

Ketjusääntö

$D(g \circ f) ?$

$$\begin{aligned} & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - g(f(\mathbf{x})) \\ = & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Ketjusääntö

$D(g \circ f) ?$

$$\begin{aligned} & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - g(f(\mathbf{x})) \\ = & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{x})) \\ \approx & g(f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x})\mathbf{h}) - g(f(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Ketjusääntö

$D(g \circ f) ?$

$$\begin{aligned} & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - g(f(\mathbf{x})) \\ = & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{x})) \\ \approx & g(f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x})\mathbf{h}) - g(f(\mathbf{x})) \\ \approx & Dg(f(\mathbf{x}))Df(\mathbf{x})\mathbf{h} \end{aligned}$$

Ketjusääntö

$D(g \circ f) ?$

$$\begin{aligned} & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - g(f(\mathbf{x})) \\ = & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{x})) \\ \approx & g(f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x})\mathbf{h}) - g(f(\mathbf{x})) \\ \approx & Dg(f(\mathbf{x}))Df(\mathbf{x})\mathbf{h} \end{aligned}$$

Ketjusääntö

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x})) \circ Df(\mathbf{x})$$

Ketjusääntö

$D(g \circ f) ?$

$$\begin{aligned} & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) - g(f(\mathbf{x})) \\ = & g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) - g(f(\mathbf{x})) \\ \approx & g(f(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x})\mathbf{h}) - g(f(\mathbf{x})) \\ \approx & Dg(f(\mathbf{x}))Df(\mathbf{x})\mathbf{h} \end{aligned}$$

Ketjusääntö

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x})) \circ Df(\mathbf{x})$$

Jacobin matriiseille:

$$J_{g \circ f}(\mathbf{x}) = J_g(f(\mathbf{x}))J_f(\mathbf{x})$$

Seuraus 6.12 / Huomautus 6.13

Olkoon $z = z(x, y)$ differentioituva samoin kuin funktiot $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$.

Seuraus 6.12 / Huomautus 6.13

Olkoon $z = z(x, y)$ differentioituva samoin kuin funktiot $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$. Tällöin yhdistetty funktio $z = z(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v)$ on differentioituva.

Seuraus 6.12 / Huomautus 6.13

Olkoon $z = z(x, y)$ differentioituva samoin kuin funktiot $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$. Tällöin yhdistetty funktio $z = z(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v)$ on differentioituva. Funktion z osittaisderivaatat saadaan ketjusäännön mukaisesti.

Seuraus 6.12 / Huomautus 6.13

Olkoon $z = z(x, y)$ differentioituva samoin kuin funktiot $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$. Tällöin yhdistetty funktio $z = z(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v)$ on differentioituva. Funktion z osittaisderivaatat saadaan ketjusäännön mukaisesti.

Esimerkki 6.15

$$h(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + xy^2 + y^2},$$

$$(x, y) = (\cos t, \sin t).$$

Lause 4.65 (Analyysi I)

Seuraus: funktion $F(x) = f(x, g(x))$ derivaatta voidaan esittää muodossa

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} g'(x).$$

Implisiittifunktiolause

Jos $F(x, y, z)$ on osittaisderivaattoineen jatkuva ja $F(P) = 0$ pisteessä $P = (x_0, y_0, z_0)$ ja lisäksi $\frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0$, niin yhtälö $F(x, y, z) = 0$ määrittää funktion $z = f(x, y)$ jossakin pisteen P ympäristössä.

Implisiittifunktiolause

Jos $F(x, y, z)$ on osittaisderivaattoineen jatkuva ja $F(P) = 0$ pisteessä $P = (x_0, y_0, z_0)$ ja lisäksi $\frac{\partial F}{\partial z}(P) \neq 0$, niin yhtälö $F(x, y, z) = 0$ määrittää funktion $z = f(x, y)$ jossakin pisteen P ympäristössä. Lisäksi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$$

Lause

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ riittävän säännöllinen alue ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ riittävän säännöllinen funktio.

Lause

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ riittävän säännöllinen alue ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ riittävän säännöllinen funktio.

Funktio f saavuttaa ääriarvonsa niissä pisteissä, joissa $\nabla f = 0$ tai alueen A reunoilla.

Lause

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ riittävän säännöllinen alue ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ riittävän säännöllinen funktio.

Funktio f saavuttaa ääriarvonsa niissä pisteissä, joissa $\nabla f = 0$ tai alueen A reunoilla. Mahdollisten ääriarvopisteiden laatua luonnehtii lause 6.39.

Lause

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ riittävän säännöllinen alue ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ riittävän säännöllinen funktio.

Funktio f saavuttaa ääriarvonsa niissä pisteissä, joissa $\nabla f = 0$ tai alueen A reunoilla. Mahdollisten ääriarvopisteiden laatua luonnehtii lause 6.39.

Esimerkki 6.40.

$$f(x, y) = y^2 + x^3 - 3x$$

Esimerkkejä

Esimerkit 7.1–7.2

Määritelmä

Muotoa $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ suorakulmio.

Määritelmä

Muotoa $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ suorakulmio.

Integraali yli suorakulmion

Jos f on riittävän säännöllinen funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on

$$\int_I f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \, dx_{n-1} \dots dx_1$$

Integrointijärjestys voi olla mikä hyvänsä (Fubinin lause).

Määritelmä

Muotoa $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ suorakulmio.

Integraali yli suorakulmion

Jos f on riittävän säännöllinen funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on

$$\int_I f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \, dx_{n-1} \dots dx_1$$

Integrointijärjestys voi olla mikä hyvänsä (Fubinin lause).

Integraali yli suorakulmion

Jos f on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on

$$\int_I f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \, dx_{n-1} \dots dx_1$$

Integraali yli suorakulmion

Jos f on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on

$$\int_I f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \, dx_{n-1} \dots dx_1$$

Integraali yli joukon A

Jos A ei ole suorakulmio, valitaan suorakulmio I johon A sisältyy ja määritellään

$$f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{jos } \mathbf{x} \in A \\ 0, & \text{jos } \mathbf{x} \notin A \end{cases}$$

Integraali yli suorakulmion

Jos f on funktio $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on

$$\int_I f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_n \, dx_{n-1} \dots dx_1$$

Integraali yli joukon A

Jos A ei ole suorakulmio, valitaan suorakulmio I johon A sisältyy ja määritellään

$$f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{jos } \mathbf{x} \in A \\ 0, & \text{jos } \mathbf{x} \notin A \end{cases}$$

ja

$$\int_A f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_I f_A(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Esimerkkejä

- Esimerkki 7.5

Esimerkkejä

- Esimerkki 7.5
- Esimerkki 7.6

Esimerkkejä

- Esimerkki 7.5
- Esimerkki 7.6
- Esimerkki 7.9.

Esimerkkejä

- Esimerkki 7.5
- Esimerkki 7.6
- Esimerkki 7.9.
- Esimerkki 7.10.

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Yleistys: Jos $g : U \rightarrow V$ on riittävän säännöllinen bijektio, on

$$\int_V f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_U f(g(\mathbf{x})) |\det(J_g(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}$$

Sijoitus integraaliin

Jos f on reaalifunktio ja g sellainen kasvava ja derivoituva funktio, että $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, on

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Yleistys: Jos $g : U \rightarrow V$ on riittävän säännöllinen bijektio, on

$$\int_V f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_U f(g(\mathbf{x})) |\det(J_g(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}$$

Esimerkki 7.15

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$