Lukuteorian seminaari, syksy 1996

H. Iwaniec:
Introduction to the
Spectral Theory of
Automorphic Forms

Harmoninen analyysi hyperbolisessa tasossa

I. Hyperbolinen taso $\mathbb{H}$

Edelleen $\mathbb{H}$ merkitsee kompleksitason ylempää puolitasoa,

$$\mathbb{H} = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Aiemmin on tarkasteltu epäeuklidista geometriaa yksikkympyrässä. Tällöin taso on yksikköympyrän sisäosa ja suorat ovat ne euklidiset ympyränkaaret, jotka leikkaavat yksikköympyrän kehän kohtisuorasti. Metriikka määritellään seuraavasti: $\delta(z_1, z_2) = \log D(z_1, z_2, z_3, z_4)$, missä z_3 ja z_4 ovat pisteiden z_1 ja z_2 määräämän epäeuklidisen suoran päätepisteet järjestettynä syklisesti tälle suoralle. Tässä geometriassa isometriat ovat muotoa

$$w = \frac{\overline{p}z + \overline{q}}{qz + p} \quad \text{ja} \quad w = \frac{\overline{p}\overline{z} + \overline{q}}{q\overline{z} + p},$$

kun $|p|^2 - |q|^2 = 1$.

Kyseiseen geometriaan saadaan metriikka differentiaalin

$$ds = \frac{2\,|dz|}{1 - |z|^2}$$

indusoimana. Geometrisen mitan indusoi differentiaali

$$d\omega = 4(1 - |z|^2)^{-2} dx\, dy.$$

Yksikköympyrän sisäosa voidaan kuvata bijektiivisesti ylemmälle puolitasolle $\mathbb{H}$ *Cayleyn muunnoksella*

$$s = \frac{z - i}{z + i}, \qquad z = i\frac{1 + s}{1 - s},$$

jolloin epäeuklidiset suorat ovat euklidiset puoliympyrät ja puolisuorat, jotka leikkaavat reaaliakselin kohtisuorasti.

Merkitään $\widetilde{z} = \frac{z-i}{z+i}$ ja $\widetilde{w} = \frac{w-i}{w+i}$. Lähtien esimerkiksi yhtälöstä

$$\delta(\widetilde{z}, \widetilde{w}) = \log \frac{1 + t}{1 - t},$$

missä

$$\begin{aligned} t &= \frac{|\widetilde{a} - \widetilde{w}|}{\left|1 - \widetilde{z}\overline{\widetilde{w}}\right|} \\ &= \left| \frac{\frac{z-i}{z+i} - \frac{w-i}{w+i}}{1 - \frac{z-i}{z+i}\frac{\overline{w}+i}{\overline{w}-i}} \right| \\ &= \left| \frac{z-w}{z-\overline{w}} \right| \end{aligned}$$

(Siegel, s.19) saadaan

$$\rho(z,w) = \delta(\widetilde{z}, \widetilde{w}) = \log \frac{1 + \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|}{1 - \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|} = \log \frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|}.$$

Näin saadaan puolitasoon $\mathbb{H}$ metriikka ρ. Tämän indusoi *Poincarén differentiaali*

$$ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2). \tag{1}$$

Vastaavasti geometrinen mitta saadaan differentiaalin

$$d\omega = y^{-2} dx\, dy$$

indusoimana. Suoraviivaisesti laskemalla todetaan, että $\cosh \rho(z,w) = 1 + 2u(z,w)$, missä

$$u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{4 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

Ellei toisin mainita, puhuttaessa hyperbolisesta tasosta tarkoitetaan tästä lähtien puolitasoa $\mathbb{H}$ varustettuna metriikalla $\mathbb{H}$.

Hyperbolisessa tasossa invariantit kuvaukset ovat muotoa

$$gz = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1$$

olevat Möbius-kuvaukset. Kuhunkin tällaiseen kuvaukseen liittyy kaksi ryhmän $G = SL_2(\mathbb{R})$ matriisia, kun taas vastaavuus ryhmän $PSL_2(\mathbb{R}) = G/\langle -I \rangle$ ja invarianttien Möbius-kuvausten välillä on yksikäsitteinen. Ryhmän $PSL_2(\mathbb{R})$ alkiot ovat Riemannin pallon $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ konformikuvaukset. Jatkossa kuitenkin samaistetaan ryhmän G ja $G/\{I, -I\}$ alkiot, mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole.

Olkoon g muotoa $\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ olevan matriisin indusoima Möbius-kuvaus. Suora lasku osoittaa, että

$$gz - gw = \frac{z-w}{(cz+d)(cw+d)}, \tag{2}$$

joten mikäli lähtöpisteet ovat käyrällä

$$C_g = \{z \in \mathbb{C} \mid |cz+d| = 1\}, \tag{3}$$

säilyttää g myös euklidisen etäisyyden. Luvun c ollessa nollasta poikkeava käyrä (3) on $|c|^{-1}$-säteinen ympyrä, jonka keskipiste on $-\frac{d}{c}$. Tällöin ympyrää C_g kutsutaan kuvauksen g *isometriaympyräksi.* Jakamalla lausekkeella $z - w$ saadaan yhtälöstä (2) raja-arvona $w \longrightarrow z$

$$\frac{d}{dz} gz = (cz + d)^{-2}. \tag{4}$$

Lukua $|cz + d|^{-2}$ kutsutaan kuvauksen g *deformaatioksi* pisteessä z. Tällöin C_g:n sisäosa koostuu pisteistä, joissa deformaatio on ykköstä suurempi ja ulko-osa niistä pisteistä, joissa deformaatio on ykköstä pienempi. Suoraan laskemalla todetaan, että g kuvaa ympyrän C_g ympyräksi $C_{g^{-1}}$ sekä vaihtaa ulko- ja sisäosat keskenään.

Olkoon $g = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. Kuhunkin tällaiseen matriisiin liitetään funktio

$$j_g(z) = cz + d.$$

Merkitään $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ja $h = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ja lasketaan

$$gh = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Tästä saadaan edelleen suoraviivaisesti laskemalla *ketjusääntö:*

$$\begin{aligned} j_g(hz)j_h(z) &= j_g\Big(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\Big)(c'z + d') \\ &= \Big(c\frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d\Big)(c'z + d') \\ &= ca'z + cb' + c'dz + dd' \\ &= (a'c + dc')z + cb' + dd = j_{gh}(z). \end{aligned}$$

Edelleen, suoraviivainen lasku osoittaa, että

$$\begin{aligned} |j_g(z)|^2 \operatorname{Im}(gz) &= (cz + d)(c\overline{z} + d)\frac{1}{2}\Big(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}\Big) \\ &= \frac{1}{2}((az + b)(c\overline{z} + d) - (a\overline{z} + b)(cz + d)) \\ &= \frac{1}{2}((ad - bc)z - (ad - bc)\overline{z}) \\ &= \frac{1}{2}(z - \overline{z}) = \operatorname{Im} z, \end{aligned} \tag{5}$$

joten kuvaus g ei muuta imaginaariosan merkkiä. Riemannin pallo $\hat{\mathbb{C}}$ jakautuu siis kolmeen G-invarianttiin osaan: $\mathbb{H}$, $\overline{\mathbb{H}}$ (alempi puolitaso) ja $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Differentiaalin (1) ja Möbius-kuvausten invarianttisuus voitaisiin päätellä myös seuraavasti: Yhtälöistä (4) ja (5) seuraa

$$(\operatorname{Im} gz)^{-1} |dgz| = (\operatorname{Im} z)^{-1} |dz|,$$

jolloin

$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Im} gz}\frac{|dgz|}{\operatorname{Im} z} = \frac{|dgz|}{\operatorname{Im} gz}.$$

Möbius-kuvausten lisäksi on kietosuunnan kääntävä isometria $z \mapsto -\overline{z}$, jota kutsutaan *peilaukseksi.* Seuraava lause on tunnettu:

Lause 1. *Möbius-kuvakset ja peilaus generoivat hyperbolisen tason* $\mathbb{H}$ *isometrioiden ryhmän.*

Aiemmin on todettu, että hyperbolisen kolmion ala on $\pi-\alpha-\beta-\gamma$, kun kulmat ovat α, β ja γ. Hyperbolisen tason kolmioille sinilause saa muodon

$$\frac{\sin\alpha}{\sinh a}=\frac{\sin\beta}{\sinh b}=\frac{\sin\gamma}{\sinh c},$$

kun a, b ja c ovat sivut jotka näkyvät kulmista α, β ja γ. Lisäksi pätee

$$\sin\alpha\sin\beta\cosh c=\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma,$$

joten sivujen pituus riippuu vain kulmista.

Yleisesti vakiokaarevuisen Riemannin pinnan alueen alaa rajoittaa epäyhtälö

$$4\pi A-KA^2\leq L^2,$$

missä A on ala, L on reunan pituus ja K on kaarevuus. Euklidisessa tasossa pätee $4\pi A\leq L^2$, kun taas hyperbolisessa tasossa on

$$4\pi A+A^2\leq L^2.$$

Tarkastellaan hyperbolisen tason i-keskistä ympyrää (Cayleyn muunnos kuvaa yksikköympyrän origon pisteeksi i, joten tätä pistettä voidaan kutsua hyperbolisen tason origoksi). Yhtälön

$$\cosh\rho(z,w)=1+\frac{1}{2}\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im}z\operatorname{Im}w}$$

mukaan ympyrän yhtälöksi saadaan

$$\cosh r-1=\frac{1}{2}\frac{|z-i|^2}{\operatorname{Im}z}. \tag{6}$$

Kun merkitään $z=x+iy$, saadaan (6) muotoon

$$x^2+(y^2-\cosh^2 r)=\sinh^2 r,$$

joten kyseessä on $\sinh r$-säteinen ja $i\cosh r$-keskinen euklidinen ympyrä. Tämän hyperbolinen ala on $4\pi(\sinh(\frac{r}{2}))^2$ ja ympäryysmitta $2\pi\sinh r$.

II. Homogeeninen avaruus $\mathbb{H}$

Olkoon H topologinen ryhmä. Tämä merkitsee sitä, että H on topologinen avaruus, jossa ryhmän kertolasku $H\times H\to H$ on jatkuva tulotopologian suhteen ja että kuvaus $H\to H,\quad h\mapsto h^{-1}$ on jatkuva. Oletetaan lisäksi, että H on lokaalisti kompakti. *Haarin* mitta μ ryhmällä H on positiivinen mitta, joka on määritelty jossakin ryhmän H σ-renkaassa ja toteuttaa joko ehdon $\mu(aK)=\mu(K)$

tai $\mu(Ka) = \mu(K)$ kaikille mitallisille osajoukoille K. Edellisessä tapauksessa mitta μ on *vasemmalta invariantti* ja jälkimmäisessä *oikealta invariantti.*

Aiemmin on selvitetty, että ryhmä G operoi joukolla $\mathbb{H}$ transitiivisesti, joten

$$\mathbb{H} = \{gz \mid g \in G\} = Gz.$$

Tarkastellaan pisteen $z = i$ stabilisaattoria. Jos

$$\frac{ai+b}{ci+d} = i, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

ja $a - d \neq 0$, saadaan

$$i = \frac{-c-b}{a-d},$$

joten on oltava voimassa $d = a$ ja $c = -b$. Koska $a^2 + b^2 = 1$, voidaan kirjoittaa $a = \cos\theta$ ja $b = \sin\theta$. Näin ollen pisteen i stabilisaattori on ortogonaalinen ryhmä

$$K = \left\{ k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Matriisit $k(\theta)$ kiinnittävät pisteen i, joten niiden indusoimat kuvaukset ovat kiertoja pisteen i ympäri. Kaavasta

$$\frac{d}{dz} gz = \frac{1}{(-i\sin\theta + \cos\theta)^2} = \mathrm{e}^{i2\theta}$$

saadaan kierron suuruudeksi 2θ.

Määritellään seuraavaksi kuvaus

$$\varphi : \mathbb{H} \to G/K, \quad \varphi(z) = gK,$$

missä $x = x + iy$ ja

$$g = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}}_{a(y)} = \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & xy^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Selvästikin $g(i) = z$. Määritellään ryhmän G aliryhmät

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

ja

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lause (Iwasawan hajotelma). *Jokaisella matriisilla $g \in G$ on yksikäsitteinen hajotelma*

$$g = nak, \text{ missä } n \in N, a \in A \text{ ja } k \in K.$$

Todistus.
$$\begin{pmatrix} a\cos\theta & a\sin\theta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

kun valitaan $a = (\gamma^2+\delta^2)^{-\frac{1}{2}}$ ja θ siten että $-\sin\theta = \gamma a$ ja $\cos\theta = \delta a$. Kyseinen valinta on selvästi mahdollinen. Kertomalla vasemmalta matriisilla $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ saadaan muutettua yläriviä alarivin säilyessä ennallaa. Tuloksena saatu matriisi on muotoa

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\gamma^2+\delta^2} + s & -\frac{\gamma}{\gamma^2+\delta^2} + t \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

josta deteminanttiehdon nojalla $\frac{s}{t} = \frac{\gamma}{\delta}$. Valitsemalla x sopivasti saadaan haluttu matriisi. Selvästikin alkuperäinen matriisi määrää prosessin yksikäsitteisesti. $\square$

Seuraus. *Kuvaus φ on bijektio.*

Ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ piste $x + iy$ voidaan siis samaistaa ryhmän NA alkion $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ kanssa. Tässä hyperbolisen tason mallissa G operoi itsellään, operaationa matriisikertolasku. Kun merkitään $z = x+iy$ ja $g = n(x)a(y)k$, saadaan kuvaukselle a selvä merkitys: $a(y)i = iy$.

Merkitään $P = NA$. Ryhmä P ei ole kommutatiivinen, mutta suoraan laskemalla havaitaan, että

$$n(x_1)n(x_2) = n(x_1 + x_2), \ a(y_1)a(y_2) = a(y_1 y_2) \text{ sekä } a(y)n(x) = n(xy)a(y), \quad (7)$$

joten $P = NA = AN$. Ryhmää P käsitellään jatkossa topologisena ryhmänäm jonka topologian indusoi tason $\mathbb{H}$ topologia. Ryhmässä P on vasemmalta ja oikealta invariantit Haarin mitat, jotka indusoivat vastaavat mitat puolitasolle $\mathbb{H}$.

Määritellään mitat dg ja $\widetilde{dg}$ ryhmässä P seuraavasti:

$$\int_{NA} f(g)\, dg = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(x)a(y)) \frac{dx\, dy}{y^2}$$

ja

$$\int_{NA} f(g)\, \widetilde{dg} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(x)a(y)) \frac{dx\, dy}{y},$$

aina, kun f on jokin testifunktio (häviää rajoitetun joukon ulkopuolella). Puolitasolle $\mathbb{H}$ indusoituvat mitat ovat

$$d\mu(z) = \frac{dx\, dy}{y^2} \text{ ja } \widetilde{d}\mu(z) = \frac{dx\, dy}{y}.$$

Tämä nähdään esimerkiksi valitsemalla $f = \chi_B$ (joukon B karakteristinen funktio), missä B on pieni suorakulmio ja integroimalla yli suorakulmion B.

Lause. *dg on vasemmalta invariantti ja $\widetilde{dg}$ on oikealta invariantti mitta.*

Todistus. Kaavan (7) mukaan

$$\begin{aligned}\int_{NA} f(a(u)n(v)g)\,dg &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(u)a(v)n(x)a(y))\frac{dx\,dy}{y^2} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(u+vx)a(yv))\frac{dx\,dy}{y^2}.\end{aligned}$$

Merkitsemällä $\xi = u + xv$ ja $\eta = yv$ saadaan yllä oleva integraali muotoon

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_{infty}^\infty f(n(\xi)a(\eta))\frac{d\xi\,d\eta}{v^2(\frac{\eta}{v})^2} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(\xi)a(\eta))\frac{d\xi\,d\eta}{\eta^2} \\ &= \int_{NA} f(g)\,dg,\end{aligned}$$

joten dg on vasemmalta invariantti. Samoin

$$\begin{aligned}\int_{NA} f(gn(u)a(v))\,\widetilde{dg} &= \int_0^\infty f(n(x)a(y)n(u)a(v))\frac{dx\,dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(x+uy)a(yv))\frac{dx\,dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(\xi)a(\eta)\frac{d\xi\,dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(\xi)a(\eta)\frac{d\xi\,d\eta}{v\frac{\eta}{v}} \\ &= \int_{NA} f(g)\,\widetilde{dg},\end{aligned}$$

joten $\widetilde{dg}$ on oikealta invariantti. □

Olkoon nyt $B \subset H$ $\mu = \frac{dx\,dy}{y^2}$-mitallinen joukko. Valitaan

$$f(n(x)a(y)) = \chi_B(x + yi) = \chi_B(n(x)a(y)i),$$

jolloin

$$\int_{NA} f(g)dg = \mu(B).$$

Valitaan $h \in SL_2(\mathbb{R})$, josta

$$f(hn(x)a(y)) = \chi_B(hn(x)a(y)i) = \chi_{h^{-1}B}(n(x)a(y)i).$$

Näin ollen

$$\mu(h^{-1}B) = \int_{NA} f(hg)\,dg = \int_{NA} f(g)\,dg = \mu(B).$$

vaihtamalla merkintöjä $h^{-1} \to h$ saadaan

$$\mu(hB) = \mu(B) \text{ aina, kun } h \in SL_2(\mathbb{R}).$$