II.1. Lokaalikompakteista ryhmistä

Husain:
Introduction to
Topological Groups

Olkoon G ryhmä ja τ ryhmän G alkiojoukon topologia. Pari (G, τ) on *topologinen ryhmä*, jos kuvaus $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ on jatkuva tulotopologian suhteen ja kuvaus $g \mapsto g^{-1}$ on jatkuva. Topologia on *lokaalikompakti*, mikäli jokaisella pisteellä on kompakti ympärist. Oletetaan jatkossa, että τ on Hausdorffin topologia. Joukko $V \subseteq G$ on *symmetrinen*, mikäli $V = V^{-1} = \{v^{-1} \mid v \in V\}$.

Funktio $f : G \to \mathbb{R}$ on *testifunktio*, mikäli f on jatkuva ja häviää jonkin kompaktin osajoukon ulkopuolella. Testifunktioiden joukosta käytetään merkintä $C_0(G)$. Ei-negatiivisten testifunktioiden joukosta käytämme merkintää $C_0^+(G)$. Jatkuvien (jatkuvien ja rajoitettujen) funktioiden $G \to \mathbb{R}$ joukosta käytetään merkintää $C(G)$ $(B(G))$. Selvästi $C_0(G) \subseteq C(X) \subseteq B(G)$, ja kyseiset joukot muodostavat reaalisen vektoriavaruuden. Kuvauksia vektoriavaruudelta reaalilukujen kunnalle kutsutaan *funktionaaleiksi*.

Olkoot $f, g \in B(G)$. Määritellään funktiot $f \vee g$ ja $f \wedge g$ ehdoilla

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ ja } (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Tällöin rajoitetut funktiot muodostavat *hilan*. Olkoon L jokin avaruuden $B(G)$ aliavaruus joka on suljettu hilaoperaatioiden $\vee$ ja $\wedge$ suhteen. Lineaarinen funktionaali $I : L \to \mathbb{R}$ on *(Daniellin) integraali*, mikäli I toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) Jos $f, g \in L$ ja $f \geq g$, niin $I(f) \geq I(g)$.

(ii) Jos $\{f_n\} \subseteq L$ on pisteittäin nollaa kohti suppeneva funktiojono, niin myös jono $\{I(f_n)\}$ suppenee kohti nollaa.

Lemma A. *Lokaalikompaktissa ryhmässä pisteellä* 1 *on kompakti symmetrinen ympäristö.*

Todistus. Määritelmän mukaan ykkösalkiolla on sellainen avoin ympäristö V, että $\overline{V}$ on kompakti. Käänteiskuvauksen jatkuvuudesta seuraa, että myös V^{-1} on ykkösalkion avoin ympäristö ja $\overline{V^{-1}}$ on kompakti. Nyt $U = \overline{V \cap V^{-1}}$ on vaadittu kompakti ympäristö. $\square$

Lemma B. *Testifunktio f on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Joukko $C = \overline{\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}} \subseteq G$ on kompakti, sillä f häviää jonkin kompaktin joukon ulkopuolella. Olkoon U pisteen 1 symmetrinen kompakti ympäristö ja ε kiinteä positiiviluku. Merkitään

$$W = \{y \in G \mid |f(yx) - f(x)| < \varepsilon, x \in UC\}$$

ja osoitetaan, että W on pisteen 1 ympäristö. Selvästikin $1 \in W$. Koska f on jatkuva, on olemassa pisteiden x ja 1 avoimet ympäristöt U_x ja V_x, jotka toteuttavat ehdon

$$\forall y \in V_x \, \forall z \in U_x \;\; |f(yz) - f(x)| < \varepsilon.$$

Kun x käy läpi kaikki (kompaktin) joukon UC pisteet, muodostavat vastaavat joukot U_x joukon UC peitteen, joka voidaan redusoida äärelliseksi peitteeksi $\{U_{x_i}\}$. Olkoot $\{V_{x_i}\}$ näitä vastaavat pisteen 1 avoimet ympäristöt. Nyt

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

on pisteen 1 avoin ympäristö ja jokaiselle parille $y \in V$, $x \in UC$ on siis voimassa

$$|f(yx) - f(x)| < \varepsilon.$$

Joukon W määritelmän mukaan $1 \in V \subseteq W$, joten W on todella pisteen 1 ympäristö.

Joukon C määritelmän mukaan $f(x) = 0$ aina, kun $x \in G \setminus UC$. Jos $y \in U$ ja $x \in G \setminus UC$ on $f(yx) = 0$, sillä muutoin $yx \in C$, josta seuraa, että $x \in u^{-1}C \subseteq UC$, mikä on ristiriidassa valinnan $x \in G \setminus UC$ kanssa. Johtopäätös on, että aina, kun $y \in U \cap W$, on voimassa

$$|f(xy) - f(x)| < \varepsilon,$$

mikä merkitsee sitä, että f on vasemmalta tasaisesti jatkuva. Samoin osoitetaan, että f on oikealta tasaisesti jatkuva. □

Integraali I määrittelee mitan μ ryhmällä G, kun asetetaan

$$\mu(A) = I(\chi_A),$$

missä χ_A on joukon A karakteristinen funktio.

Merkitään $f_a(x) = f(ax)$ ja $f^a(x) = f(xa)$. Integraali I on *vasemmalta invariantti*, jos $I(f_a) = I(f)$ ja *oikealta invariantti*, jos $I(f^a) = I(f)$.

Lause (Haar). *Lokaalikompaktissa Hausdorffin ryhmässä on olemassa vasemmalta ja oikealta invarintit integraalit. Kyseiset integraalit ovat vakiokerrointa vaille yksikäsitteisesti määrätyt. Invariantteja integraaleja kutsutaan Haarin integraaleiksi ja näiden indusoimia mittoja haarin mitoiksi.*

Olkoon μ ryhmän G vasemmalta invariantti Haarin mitta. Tällöin $\mu(A)$ on määritelty ainakin kaikilla kompakteilla osajoukoilla $A \subseteq G$, ja siis myös $\mu(Ag)$ on olemassa aina, kun $g \in G$. Todetaan, että $\mu(g_1 Ag) = \mu(Ag)$ aina, kun $g_1 \in G$. Näin ollen ehdolla $\mu_g(A) = \mu(Ag)$ määritelty joukkofunktio on myös vasemmalta invariantti mitta, joten

$$\mu(Ag) = \delta(g)\mu(A),$$

missä $\delta(g) \in \mathbb{R}^+$ riippuu ainoastaan alkiosta g. Todetaan myös, että

$$\delta(g_1 g_2) = \delta(g_1)\delta(g_2),$$

siis δ on morfismi $G \to \mathbb{R}^+$.

Lemma C. *Kuvaus δ on jatkuva.*

Todistus. Riittää osoittaa, että δ on jatkuva pisteessä 1, sillä δ on morfismi. Olkoon U sellainen 1 ympäristö, että $\overline{U}$ on kompakti. Valitaan $f \in C_0^+(G)$, $f \neq 0$ ja $A = \{x \in G \mid f(x) > 0\}$. Joukko $\overline{A}$ on myös kompakti, sillä f häviää jonkin kompaktin joukon ulkopuolella. Tällöin myös $B = \overline{A}\,\overline{U}$ on kompakti, joten voidaan valita sellainen $g \in C_0^+(G)$, että g saa arvon 1 joukossa B. Valitaan jokin positiiviluku ε. Lemman B nojalla f on tasaisesti jatkuva, joten on olemassa sellainen joukkoon U sisältyvä pisteen 1 ympäristö V, että aina kun $x^{-1}y \in V$, on voimassa

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \frac{I(f)}{I(g)}.$$

Jos myös $x \in V$, on

$$\left|f(yx^{-1}) - f(y)\right| \leq \varepsilon \frac{I(f)}{I(g)} g(y)$$

aina kun $y \in G$ ja $x^{-1}y \in V$. Integraalin ominaisuudesta (1) seuraa, että

$$\left|I(f^{x^{-1}}) - I(f)\right| \leq \varepsilon \frac{I(f)}{I(g)} I(g) = \varepsilon I(f).$$

Tässä $f^{x^{-1}}$ merkitsee funktiota $f^{x^{-1}}(y) = f(yx^{-1})$. Näin ollen

$$\left|\delta(x^{-1}) - 1\right| = \left|\frac{\delta(x^{-1})I(f)}{I(f)} - 1\right| = \left|\frac{I(f^{x^{-1}})}{I(f)} - 1\right| \leq \varepsilon$$

aina, kun $x \in V$. Joukon V symmetrisyyden vuoksi x^{-1} voidaan korvata alkiolla x, mistä väite seuraa □

Jatkuvaa morfismia $\delta : G \to \mathbb{R}^+$ kutsutaan *modulaarifunktioksi.*

Olkoon μ vasemmalta invariantti mitta. Selvästi kaavalla $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$ määritelty joukkofunktio on oikealta invariantti mitta. Edelleen,

$$\widetilde{\mu}(gA) = \mu((gA)^{-1}) = \mu(A^{-1}g^{-1}) = \delta(g^{-1})\mu(A^{-1}) = \delta(g)^{-1}\widetilde{\mu}(A).$$

Mikäli $\delta(g) = 1$ kaikille $g \in G$, sanotaan, että G on *unimodulaarinen.*

Seuraus. *kompakti ryhmä on unimodulaarinen.*

Todistus. Jatkuvuuden nojalla $\delta(G) \leq \mathbb{R}^+$ on kompakti, joten $\delta(G) = \{1\}$. □

II.2 Tasosta $\mathbb{H}$

Olkoon $g \in G = SL_2(\mathbb{R})$ sellainen kuvaus, että $gi = x + iy$. Tällöin g on tekijää $k \in K = \mathrm{Stab}(i)$ vaille muotoa $g = n(x)a(y)$. Selvästi nämä tekijät ovat yksikäsitteisesti määrätyt. Koko ryhmälle G saadaan näin hajotelma $G = NAK$, ja tason $\mathbb{H}$ pisteet voidaan yksikäsitteisellä tavalla samaistaa ryhmän $P = NA$ alkioiden kanssa. Valitaan ryhmälle NA topologia, joka indusoituu hyberbolisen tason $\mathbb{H}$ topologiasta edellämainitun samaistuksen kautta. Todetaan vielä että P on topologinen ryhmä. Tätä varten näytetään ensin, että käänteisalkion laskeminen on jatkuva kuvaus.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "z\mapsto z^{-1}"'] & NA \arrow[d, "\psi(na)=(na)^{-1}"] \\ \mathbb{H} & NA \arrow[l, "\varphi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Suora lasku osoittaa, että $\varphi^{-1}\psi\varphi(x+iy) = -\frac{x}{y} + i\frac{1}{y}$, joten selvästi ψ on jatkuva.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}\times\mathbb{H} \arrow[r, "\varphi\times\varphi"] \arrow[d, "(z_1,z_2)\mapsto z_1z_2"'] & NA\times NA \arrow[d, "\psi(n_1a_1,n_2a_2)=n_1a_1n_2a_2"] \\ \mathbb{H} & NA \arrow[l, "\varphi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Havaitaan, että vastaava yhdistetty kuvaus on muotoa

$$(x_1+iy_1, x_2+iy_2) \mapsto (x_1+x_2y_1) + iy_1y_2,$$

mikä on selvästi jatkuva kuvaus tulotopologiassa.

Näin ollen tasolle $\mathbb{H}$ voidaan konstruoida Haarin mitat konstruoimalla sellaiset ryhmälle NA. Itse asiassa, aliryhmät N, A, ja K ovat unimodulaarisia ja niiden invariantit mitat saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} dn &= dx, \text{ kun } n = n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ da &= y^{-1}dy \text{ kun } a = a(y) = \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ dk &= (2\pi)^{-1}d\theta, \text{ kun } k = k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Yllä dx, dy ja $d\theta$ merkitsevät tavanomaisia Lebesguen mittoja. Ryhmän K mitta $d\theta$ voidaan normalisoida vaatimuksella $\int_K dk = 1$, sillä K on kompakti. Ryhmälle NA ja siis myös tasolle $\mathbb{H}$ saadaan vasemmalta ja oikealta invariantit integraalit kun määritellään

$$I(f) = \int_{NA} f(g)\, dg \text{ ja } J(f) = \int_{NA} f(g)\, d\widetilde{g},$$

missä $dg = \frac{dx\,dy}{y^2}$ ja $d\widetilde{g} = \frac{dx\,dy}{y}$. Modulifunktion määrittämiseksi merkitään

$$h = n(v)a(y) \in NA,\ g = n(x)a(y)$$

ja lasketaan

$$\begin{aligned} \int_{NA} f(gh)\, dg &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(x)a(y)n(v)a(u)) \frac{dx\,dy}{y^2} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(x+yv)a(yu)) \frac{dx\,dy}{y^2} \\ &= u\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(n(\xi)a(\eta)) \frac{d\xi\,d\eta}{\eta^2} \\ &= u\int_{NA} f(g)\, dg, \end{aligned}$$

mistä nähdään että $\delta(x+iy)=y$.

III. Geodeesiset napakoordinaatit

Usein käsitellään tason $\mathbb{H}$ funktioita, jotka riippuvat vain hyperbolisesta etäisyydestä, joten on luontevaa siirtää tarkastelu napakoordinaatistoon. Geodeesiset napakoordinaatit saadaan *Cartanin hajotelmasta*

$$G = KAK.$$

Hajotelma saadaan seuraavasti: Valitaan $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ sekä merkitään

$$k_1 = k_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in K.$$

Ensiksi etsitaan sellainen $k_1 \in K$, että $k_1 g$ on symmetrinen. Mikäli g ei ole symmetrinen, on $b \neq c$ ja

$$k_1 g = \begin{pmatrix} a\cos\theta + c\sin\theta & b\cos\theta + d\sin\theta \\ -a\sin\theta + c\cos\theta & -b\sin\theta + d\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Matriisi $k_1 g$ on symmetrinen tarkalleen silloin kun

$$b\cos\theta + d\sin\theta = -a\sin\theta + c\cos\theta = 0,$$

mikä on ekvivalentti ehdon $\cot\theta = -\frac{a+b}{b-c}$ kanssa. Välillä $(0,\pi)$ on tarkalleen yksi tämän ehdon toteuttava kulma.

Merkitään

$$g_1 = k_1 g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad k = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Mikäli $k_1 g$ ei ole diagonaalimatriisi, on $\beta \neq 0$ ja konjugoidussa matriisissa kgk^{-1} on sekä vasemmassa alakulmassa että oikeassa yläkulmassa alkio

$$\beta\cos^2\theta_1 - \beta\sin^2\theta_1 + \gamma\cos\theta_1\sin\theta_1 - \alpha\cos\theta_1\sin\theta_1,$$

joten kg_1k^{-1} on diagonaalinen tarkalleen silloin kun

$$(\gamma-\alpha)\cos\theta_1\sin\theta_1 + \beta(\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1) = 0,$$

mikä on ekvivalentti ehdon

$$\cot 2\theta_1 = \frac{\alpha-\gamma}{2\beta}$$

kanssa. Jälleen voidaan löytää tällainen kulma θ_1. Saatu matriisi $a = kk_1gk^{-1}$ on siis diagonaalinen, joten deteminanttiehdon nojalla $a \in A$. koska myös $-I \in K$, voidaan olettaa että matriisin a alkiot ovat positiivisia. Näin ollen, aina kun $g \in G$, voidaan kirjoittaa $g = k(\varphi)a(e^{-r})k(\theta)$, missä $0 \leq \varphi < \pi$, $r \geq 0$ ja

$$a(\mathrm{e}^{-r}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{r}{2}} \end{pmatrix}.$$

Palautetaan mieleen, että kuvaus $k(\varphi)$ on kierto pisteen i ympäri kulman 2φ verran ja lasketaan seuraavaksi etäisyys pisteestä i pisteeseen gi:

$$\begin{aligned}\rho(gi,i) &= \rho(k(\varphi)a(\mathrm{e}^{-r})k(\theta)i,i)\\ &= \rho(k(\varphi)e^{-r}i,i)\\ &= \rho(\mathrm{e}^{-r}i,i)\\ &= \log\frac{|\mathrm{e}^{-r}+1|+|\mathrm{e}^{-r}-1|}{|\mathrm{e}^{-r}+1|-|\mathrm{e}^{-r}-1|}\\ &= \log\frac{\mathrm{e}^{-r}+1+1-\mathrm{e}^{-r}-1}{\mathrm{e}^{-r}+1-(1-\mathrm{e}^{-r})}\\ &= \log\frac{2}{2\mathrm{e}^{-r}}=r,\end{aligned}$$

siis r on hyperbolinen etäisyys pisteestä i pisteeseen $gi=z=x+iy$.

Tarkastellaan vielä hajotelmaa $g=k_1ak_2$. Jos yhtälö

$$k(\varphi_1)a(r_1)k(\theta_1)=k(\varphi_2)a(r_2)k(\theta_2),$$

olisi voimassa, niin kuvaamalla pistettä i saataisiin

$$k(\varphi_1)\mathrm{e}^{-r_1}i=k(\varphi_2)\mathrm{e}^{-r_2}i,$$

ja laskemalla etäisyydet pisteestä i saadaan $r_1=r_2$, joten r on yksikäsitteisesti määrätty, joten myös φ määräytyy yksikäsitteisesti, mikäli rajoitetaan $0\le\varphi<\pi$.

Paria (r,φ) kutsutaan pisteen gi *geodeettisiksi napakoordinaateiksi.* Esitykset muodossa $x+iy$ saadaan suoraan laskemalla:

$$k(\varphi)\mathrm{e}^{-r}i=\frac{\mathrm{e}^{-r}i\cos\varphi+\sin\varphi}{-\mathrm{e}^{-r}i\sin\varphi+\cos\varphi}=\frac{(\mathrm{e}^{r}-\mathrm{e}^{-r})\sin\varphi\,\cos\varphi}{\mathrm{e}^{r}\cos^2\varphi+\mathrm{e}^{-r}\sin^2\varphi}+\frac{i}{\mathrm{e}^{r}\cos^2\varphi+\mathrm{e}^{-r}\sin^2\varphi},$$

josta

$$\begin{aligned}y&=\Big(\mathrm{e}^{r}-\sin^2\varphi(\mathrm{e}^{r}-\mathrm{e}^{-r})\Big)^{-1}\\ &=\Big(\frac12(\mathrm{e}^{r}+\mathrm{e}^{-r})+\frac12(\mathrm{e}^{r}-\mathrm{e}^{-r})-(\mathrm{e}^{r}-\mathrm{e}^{-r})\sin^2\varphi\Big)^{-1}\\ &=\Big(\cosh r+\frac12(\mathrm{e}^{r}-\mathrm{e}^{-r})(1-2\sin^2\varphi)\Big)^{-1}\\ &=(\cosh r+\sinh r\cos 2\varphi)^{-1}\end{aligned}$$

ja

$$x=y\sinh r\sin 2\varphi.$$

vastaavat differentiaalit saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}ds^2&=dr^2+(2\sinh r)^2d\varphi^2,\\ d\omega&=(2\sinh r)\,dr\,d\varphi.\end{aligned}$$

Jos merkitään $\cosh r=1+2u$, missä $r=\rho(gi,i)$ ja u kuten aiemmin, saadaan

$$d\omega=4du\,d\varphi.$$

IV. Bruhatin hajotelma

Iwasawan ($G = NAK$) ja Cartanin hajotelman ($G = KAK$) lisäksi esitetään vielä Bruhat'n hajotelma

$$G = \pm NAN \cup \pm N\omega AN,$$

missä $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hajotelmassa osa $NAN = AN = NA$ koostuu selvästikin yläkolmiomatriiseista. Toinen osa koostuu sellaisista matriiseista, joissa vasemmassa alakulmassa oleva alkio on nollasta poikkeava, tällöin

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{c} & \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nähdään, että hajotelmassa

$$n(x_1)a(y)n(x_2) = \begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & x_2 y^{\frac{1}{2}} + x_1 y^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & x_2 y^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

ensinnäkin y määräytyy yksikäsitteisesti, joten myös x_2 ja siis x_1 määräytyvät yksikäsitteisesti. Samoin voidaan päätellä hajotelman toisesta osasta.

V. Tason $\mathbb{H}$ kuvausten luokittelusta

Affiinilla tasokuvauksella tarkoitetaan translaatiota, venytystä tai kiertoa tai näiden kompositiota. Tasossa $\mathbb{H}$ tällaisia liikkeitä ovat Möbius-transformaatiot. Koska konjugaattio säilyttää kuvauksen jonakin edellämainituista, on kuvausten luokittelu oltava invariantti konjugoinnin suhteen. Kun $g \in PSL_2(\mathbb{R})$, merkitään

$$[g] = \{\tau g \tau^{-1} \mid \tau \in PSL_2(\mathbb{R})\}.$$

Olkoon

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \pm I.$$

Mikäli $c = 0$, on kuvauksella yksi kiintopiste joukossa $\hat{\mathbb{R}}$, nimittäin $\frac{b}{a^{-1}-a}$. Jos $c \neq 0$, saadaan kiintopisteet muodossa

$$\frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c},$$

joten luokittelu jakautuu kiintopisteiden mukaan kolmeen tapaukseen:

(1) Kuvauksella g on yksi kiintopiste joukossa $\hat{\mathbb{R}}$ (parabolinen).

(2) Kuvauksella g on kaksi eri kiintopistettä joukossa $\hat{\mathbb{R}}$ (hyperbolinen).

(3) Kuvauksen g kiintopisteet ovat kompleksisia, toinen joukossa $\mathbb{H}$ ja toinen joukossa $\overline{\mathbb{H}}$ (elliptinen).

Mikäli $c \neq 0$, voidaan luokittelu suorittaa kuvausta g esittävän matriisin jäljen itseisarvon avulla:

Kuvaus on parabolinen tarkalleen silloin kun $|a+d| = 2$, hyperbolinen kun $|a+b| > 2$ ja elliptinen kun $|a+b| < 2$. Jälki säilyy konjugoinnissa, joten luokittelu on invariantti.

Aliryhmien N, A ja K alkiot ja (näiden vasta-alkiot yhteenlaskun suhteen) ovat parabolisia, hyperbolisia ja elliptisiä kuvauksia. Niiden välittämät kuvaukset ovat translaatio (kiintopiste ∞), venytys (kiintopisteet 0 ja ∞) ja kierto (kiintopiste i). Pisteen radat parabolisessa kuvauksessa ovat *horosyklejä* ja hyperbolisessa *hypersyklejä*. Kun g hajoitetaan translaation, venytyksen ja rotataation kompositioksi, venytyksessä $z \mapsto pz$ kerrointa p kutsutaan kuvauksen g *normiksi* ja $|\log p|$ on pisteiden z ja gz hyperbolinen etäisyys.

VI. Laplacen operaattori

Olkoon $\mathbb{C}^{\mathbb{H}}$ kuvausten $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ joukko. Kun $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ on jokin funktio, määritellään lineaarinen operaattori

$$T_g : \mathbb{C}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{H}}$$

ehdolla

$$(T_g f)(z) = f(gz).$$

Lineaarinen operaattori $L : \mathbb{C}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{H}}$ on *invariantti*, jos $LT_g = T_g L$ aina, kun $g \in G$, toisin sanoen

$$L(f(gz)) = (Lf)(gz) \text{ aina kun } f \in \mathbb{C}^{\mathbb{H}} \text{ ja } g \in G.$$

Laplace-Beltramin operaattori Δ karakterisoidaan siten, että diffeomorfismi on isometria silloin ja vain silloin kun Δ on invariantti. Tasossa $\mathbb{H}$ on

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = -(z-\overline{z})^2 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}},$$

missä

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ ja } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Merkitään $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Silloin

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}v(x,y) + i\left(\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right)\Big).$$

Mikäli f on holomorfinen jossakin alueessa, annihiloi operaattori $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ funktion f Cauhcy-Riemannin differentiaaliyhtälöiden nojalla tässä alueessa. Toisaalta Δ annihiloi harmoniset funktiot.

Geodeesisissa napakoordinaateissa Laplacen operaattori saa muodon

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{\tanh r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{(2\sinh r)^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

tai

$$\Delta = u(u+1)\frac{\partial^2}{\partial u^2} + (2u+1)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{16u(u+1)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Jokainen G-invariantti differentiaalioperaattori tasossa $\mathbb{H}$ voidaan esittää operaattorin Δ vakiokertoimisena polynomina.

VII. Operaattorin Δ ominaisfunktiot

Funktio $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ on operaattorin Δ ominaisarvoon $\lambda \in \mathbb{C}$ liittyvä *ominaisfunktio* jos

$$(\Delta + \lambda)f = 0.$$

Ominaisarvoon $\lambda = 0$ liittyvät ominaisfunktiot ovat harmoniset funktiot, joihin sisältyvät holomorfiset funktiot.

Ominaisarvoon λ liittyviä ominaisfunktioita voidaan pyrkiä selvittämään esimerkiksi muuttujien erottamisella. Lisäksi voidaan annetusta ominaisfunktiosta f siirtyä funktioon $T_g f$ sekä integroida jonkin ryhmän G osajoukon yli. Täten voidaan löytää ominaisfunktio, joka toteuttaa haluttuja transformaatiosääntöjä.

Mikäli ominaisfunktio ei riipu muuttujasta x, saa ominaisarvoyhtälö muodon

$$(y^2 \frac{d^2}{dy^2} + \lambda)f = 0,$$

mikä ratkeaa sijoituksella $y = \mathrm{e}^z$. Riippumattomiksi ratkaisuiksi saadaan esimerkiksi

$$\frac{1}{2}(y^s + y^{1-s}) \text{ ja } \frac{1}{2s-1}(y^s - y^{1-s}),$$

missä s valitaan siten, että $s(1-s) = \lambda$. Kutakin arvoa $\lambda \neq \frac{1}{4}$ vastaa kaksi arvoa. Kun $\lambda = \frac{1}{4}$ saadaan riippumattomiksi ratkaisuiksi $y^{\frac{1}{2}}$ ja $y^{\frac{1}{2}} \log y$.

Tarkastellaan seuraavaksi ratkaisuja, jotka ovat muuttujan x suhteen jaksoa 1. Merkitään $e(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x}$ ja separoidaan muuttujat: $f(z) = e(x)F(2\pi y)$. Kun merkitään $z = 2\pi y$, osoittaa suora lasku, että $F(z)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$z^2 F''(z) + (\lambda - z^2)F(z) = 0, \tag{6-1}$$

joka muistuttaa Besselin yhtälöä

$$z^2 F''(z) + zF'(z) - (z^2 + \nu^2)F(z) = 0.$$

Yhtälön (6-1) ratkaisut on taulukoitu: Riippumattomat ratkaisut ovat

$$(2\pi^{-1}y)^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(y)$$

ja

$$(2\pi y)^{\frac{1}{2}} I_{s-\frac{1}{2}}(y),$$

missä

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} \quad \text{ja}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}(\sin \pi\nu)^{-1}(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z))$$

ovat Besselin funktioita. Ensimmäinen ratkaisu käyttäytyy asymptoottisesti kuten e^{-y} ja toinen kuten e^{y}. Jos

$$f(z) = o(\mathrm{e}^{2\pi y}),$$

on ratkaisun oltava *Whittakerin funktion*

$$W_s(z) = 2y^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi y)\mathrm{e}(x)$$

monikerta. Funktio W_s voidaan jatkaa alemmalle puolitasolle $\overline{\mathbb{H}}$ symmetrialla $W_s(z) = W_s(\overline{z})$. Besselin funktioille voidaan johtaa lukuisia esityksiä ja näiden välillä on monenlaisia yhteyksiä. Eräs jatkossa käytettävä esitys on

$$K_\nu(z) = \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \int_0^\infty (t^2+1)^{-\nu-\frac{1}{2}} \cos(tz)\, dt. \tag{6-2}$$

Käytetään nyt edellämainittua menetelmää lähtien liikkeelle ominaisfunktiosta y^{-s}. Vaaditaan, että transformaatiosääntö $f(z+x) = \mathrm{e}(x)f(z)$ toteutuu. Merkitään $\chi(n) = \mathrm{e}(x)$, kun $n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, jolloin χ on ryhmän N karakteri ja kyseinen transformaatiosääntö voidaan antaa muodossa $f(nz) = \chi(n)f(z)$. Jotta integraali suppenisi ehdottomasti, lähdetään funktiosta $\overline{\chi}(n(x))(\operatorname{Im}\omega n(x)z)^s$ ja integroidaan yli ryhmän N:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}(u) \left(\operatorname{Im}\frac{-1}{z-u}\right)^s du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}(u) \left(\operatorname{Im}\frac{-1}{x+iy-u}\right)^s du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}(u) \left(\frac{y}{(x-u)^2+y^2}\right)^s du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}(u) \left(\frac{y^{-1}}{\left(\frac{x-u}{y}\right)^2+1}\right)^s du,
\end{aligned}$$

josta sijoitus $t = \frac{u-x}{y}$ antaa

$$\begin{aligned}
f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}(x+ty)y^{-s}(t^2+1)^{-s}y\, dt \\
&= \mathrm{e}(x)\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-s}y^{1-s}\mathrm{e}(ty)\, dt.
\end{aligned}$$

Integraalilauseketta voidaan käsitellä edelleen:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-s}\mathrm{e}(ty)\, dt \\
=&\int_0^\infty (t^2+1)^{-s}\mathrm{e}(ty)\, dt + \int_0^\infty (t^2+1)^{-s}\mathrm{e}(-ty)\, dt \\
=&2\int_0^\infty (t^2+1)^{-s}\cos 2\pi ty\, dt \\
=&2K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi y)\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(s)^{-1}(\pi y)^{s-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

kaavan (6-1) mukaan. Näin ollen

$$f(z) = \pi^s\Gamma(s)^{-1}W_s(z).$$