HECKEN OPERAATTORIT

Kutakin lukua $n \in \mathbb{N}$ kohti määritellään

$$\mathbb{M}(n) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{lz+h} \middle| a, b, l, h \in \mathbb{Z}, ah - bl = n \right\},$$

jolloin erityisesti $\mathbb{M}(1)$ on modulaariryhmä Γ. Samoin kuin Γ, voidaan $\mathbb{M}(n)$ samaistaa monoidin $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})/\pm I$ osajoukon kanssa.

Tarkastellaan muunnosta

$$f(M(z)), \quad M \in \mathbb{M}(n), \tag{1}$$

missä f on mielivaltainen Γ-automorfinen funktio. Jos $\gamma' = \gamma M \in \Gamma M \subseteq \mathbb{M}(n)$, on $f(\gamma'(z)) = f(\gamma M(z)) = f(M(z))$, joten joukon $\mathbb{M}(n)$ alkion M sijasta voidaan tarkastella luokkaa ΓM. Olkoon $\{M_\nu \mid \nu \in I\}$ jokin edustajisto, jolloin

$$\mathbb{M}(n) = \bigcup_\nu \Gamma M_\mu$$

on joukon $\mathbb{M}(n)$ hajotelma erillisten sivuluokkien unioniksi. Jos $\gamma \in \Gamma$, on $\{M_\nu \gamma\}$ selvästi edustajiston permutaatio $\pmod \Gamma$, joten

$$\sum_\nu f(M_\nu(z)) \tag{2}$$

on Γ-automorfinen, mikäli kyseinen summa on määritelty.

Lemma. *Edustajistoksi voidaan valita kuvausten*

$$\left\{ z \mapsto \frac{az+b}{d} \middle| ad = n,\ a, d > 0,\ 0 \le b < d \right\} \tag{3}$$

joukko. Erityisesti summa (2) on äärellinen ja siis hyvin määritelty.

Todistus. Olkoon $M \in \mathbb{M}(n)$ matriisin

$$\begin{pmatrix} a & b \\ l & h \end{pmatrix}$$

määräämä kuvaus. Valitsemalla $l' = -l/\operatorname{syt}(a, l)$ ja $h' = a/\operatorname{syt}(a, l)$ nähdään että on olemassa sellainen matriisi

$$\gamma = \begin{pmatrix} a' & b' \\ l' & h' \end{pmatrix} \in \Gamma$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

että tämän indusoimassa kuvauksessa lausekkeen $\gamma M(z)$ nimittäjä on vakio. Kuvausta $\gamma_\infty : z \mapsto z+1$ soveltamalla löydetään joukkoon (3) kuuluva luokan ΓM alkio. Kyseiset kuvaukset ovat epäkongruentteja modulo Γ, sillä jos olisi

$$\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 + \beta d_1 \\ \gamma a_1 & \gamma b_1 + \delta d_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{\in \Gamma} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{M}(n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{M}(n)},$$

pitäisi olla $\gamma = 0$. Tällöin olisi $\alpha\delta = 1$, ja voidaan olettaa, että $\alpha = \delta = 1$. Näin ollen $a_1 = a_2$, $d_1 = d_2$, josta myös $b_1 = b_2$. □

Edellisestä lemmasta saadaan suoraan, että kuvaus

$$(T(n)f)(z) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=n} \sum_{b\ (d)} f((az+b)/d)$$

on Γ-automorfinen. Γ-automorfisten funktioiden avaruudessa määriteltyä kuvausta $T(n)$ kutsutaan *Hecken operaattoriksi.* Erityisesti havaitaan, että

$$(T(1)f)(z) = \sum_{ad=1} \sum_{b\ (d)} f((az+b)/d) = f(z),$$

joten $T(1)$ on identiteettikuvaus

Lemma. *Hecken operaattorit kommutoivat keskenään. Tarkemmin,*

$$T(m)T(n) = \sum_{d|(m,n)} T(\frac{mn}{d^2}).$$

Todistus. Olkoon ensin $(m,n) = 1$. Sillon Γ-automorfinen f toteuttaa

$$\begin{aligned} &(T(m)T(n)f)(z) \\ =&(mn)^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=m} \sum_{b\ (d)} \sum_{a'd'=n} \sum_{b'\ (d')} f((aa'z + a'b + b'd)/(dd')) \\ =&(mn)^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=m} \sum_{a'd'=n} \sum_{h\ (dd')} f((aa'z+h)/(dd')) \\ =&(T(mn)f)(z). \end{aligned}$$

Viimeinen rivi seuraa siitä, että aina $(a',d) = 1$. Näin ollen

$$T(m)T(n) = T(mn),$$

kun $(m,n) = 1$.

Oletetaan nyt, että $m = p^u$ ja $n = p^v$ ovat saman alkuluvun potensseja. Tällöin väite saa muodon

$$T(p^u)T(p^v) = \sum_{l=0}^{\min\{u,v\}} T(p^{u+v-2l}).$$

Mikäli $p \in \mathbb{P}$ on alkuluku, saadaan

$$
\begin{aligned}
(T(p)f(z)) &= p^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=p} \sum_{h\ (d)} f((az+h)/d) \\
&= p^{-\frac{1}{2}} \Big(f(pz) + \sum_{h=0}^{p-1} f((z+h)/p) \Big).
\end{aligned}
$$

Edelleen, suora lasku antaa

$$
\begin{aligned}
&(T(p^r)T(p)f)(z) \\
=&p^{-\frac{r+1}{2}} \Big(\sum_{ad=p^r} \sum_{b\ (d)} f(\frac{apz+bp}{d}) + \sum_{h=0}^{p-1} \sum_{ad=p^r} \sum_{b\ (d)} f(\frac{az+b+dh}{dp}) \Big) \\
=&p^{-\frac{r+1}{2}} \Big(\sum_{u=0}^{r} \sum_{b=0}^{p^u-1} f(\frac{p^{r-u+1}z+bp}{p^u}) + \sum_{u=0}^{r} \sum_{b=0}^{p^u-1} \sum_{h=0}^{p-1} f(\frac{p^{r-u}z+b+hp^u}{p^{u+1}}) \Big)
\end{aligned}
$$

Toisaalta luvut $b + hp^u$ ovat epäkongruentteja modulo p^{u+1} ja

$$
\begin{aligned}
&(T(p^{r+1})f)(z) \\
=&p^{-\frac{r+1}{2}} \sum_{ad=p^{r+1}} \sum_{b\ (d)} f(\frac{az+b}{d}) \\
=&p^{-\frac{r+1}{2}} \sum_{u=0}^{r+1} \sum_{b=0}^{p^u-1} f(\frac{p^{r-u+1}z+b}{p^u}) \\
=&p^{-\frac{r+1}{2}} f(p^{r+1}z) + p^{-\frac{r+1}{2}} \sum_{u=1}^{r+1} \sum_{b=0}^{p^u-1} f(\frac{p^{r-u+1}z+b}{p^u}) \\
=&p^{-\frac{r+1}{2}} f(p^{r+1}z) + p^{-\frac{r+1}{2}} \sum_{u=0}^{r} \sum_{b=0}^{p^{u+1}-1} f(\frac{p^{r-u}z+b}{p^{u+1}}),
\end{aligned}
$$

joten

$$
\begin{aligned}
&(T(p^r)T(p)f)(z) \\
=&p^{-\frac{r+1}{2}} \sum_{u=0}^{r} \sum_{b=0}^{p^u-1} f(\frac{p^{r-u+1}z+bp}{p^u}) + (T(p^{r+1})f)(z) - p^{-\frac{r+1}{2}} f(p^{r+1}z) \\
=&p^{-\frac{r+1}{2}} f(p^{r+1}z) + p^{-\frac{r+1}{2}} \sum_{u=1}^{r} \sum_{b=0}^{p^u-1} f(\frac{p^{r-u+1}z+bp}{p^u}) \\
&- p^{-\frac{r+1}{2}} f(p^{r+1}z) + (T(p^{r+1})f)(z) \\
=&(T(p^{r+1})f)(z) + p^{-\frac{r+1}{2}} \sum_{u=1}^{r} \sum_{b=0}^{p^u-1} f(\frac{p^{r-u}z+b}{p^{u-1}}).
\end{aligned}
$$

Koska

$$
f(\frac{p^{r-u}z+b+p^{u-1}}{p^{u-1}}) = f(\frac{p^{r-u}z+b}{p^{u-1}}+1) = f(\frac{p^{r-u}z+b}{p^{u-1}}),
$$

on

$$\sum_{b=0}^{p^u-1} f(\frac{p^{r-u}z+b}{p^{u-1}})$$
$$=p\sum_{b=0}^{p^{u-1}-1}(\frac{p^{r-u}z+b}{p^{u-1}}).$$

Näin ollen

$$(T(p^r)T(p)f)(z)$$
$$=(T(p^{r+1})f)(z)+p^{-\frac{r-1}{2}}\sum_{u=0}^{r-1}\sum_{b=0}^{p^u-1}f(\frac{p^{r-u-1}z+b}{p^u})$$
$$=(T(p^{r+1})f)(z)+(T(p^{r-1})f)(z),$$

mistä saadaan väittämän erikoistapaus

$$T(p^r)T(p)=T(p^{r+1})+T(p^{r-1}), \tag{4}$$

kun $r\geq 1$. Tällöin rekursion

$$T(p^r)=T(p^{r-1})T(p)-T(p^{r-2})\quad r\geq 2$$

mukaan $T(p^r)$ on $T(p)$:n polynomi. Esimerkiksi $T(p^2)=T(p)T(p)-1=T(p)^2-1$, $T(p^3)=T(p)^3-2T(p)$, $T(p^4)=T(p)^4-3T(p)^2+1$, jne. Yhdistämällä tämä havainto ja tapaus $(m,n)=1$ saadaan kommutatiivisuus.

Olkoon

$$U(\lambda,\mu)=T(p^\lambda)T(p^\mu)-T(p^{\lambda+1})T(p^{\mu-1}).$$

Käyttämällä kaavaa (4) tapauksissa $r=\lambda+1$ ja $r=\mu$ sekä hyödyntämällä kommutatiivisuutta saadaan

$$U(\lambda,\mu)=U(\lambda-1,\mu-1),$$

kun $\lambda\geq 1$ ja $\mu\geq 2$. Näin ollen

$$U(u+v-l,l)=U(u+v-2l+1,1)=T(p^{u+v-2l+1})T(p)-T(p^{u+v-2l+2})$$
$$=T(p^{u+v-2l+2})+T(u+v-2l)-T(p^{u+v-2v-2})$$
$$=T(p^{u+v-2l}),$$

kun $1\leq l\leq u\leq v$. Nyt

$$\sum_{l=1}^{u}T(p^{u+v-2l})$$
$$=\sum_{l=1}^{u}U(u+v-l,l)$$
$$=\sum_{l=1}^{u}\big(T(p^{u+v-l})T(p^l)-T(p^{u+v-l+1})T(p^{l-1})\big)$$
$$=\sum_{l=1}^{u}T(p^{u+v-l})T(p^l)-\sum_{l=0}^{u-1}T(p^{u+v-l})T(p^l)$$
$$=T(p^v)T(p^u)-T(p^{u+v}),$$

mistä väite seuraa. $\square$

Seuraavaa Hecken operaattoreita koskevaa tulosta todistetaan aputulos. Määritellään *kongruenssialiryhmä* $\Gamma_0(N)$ aina, kun N on positiivinen kokonaisluku:

$$\Gamma_0(N) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{lz+h} \,\middle|\, a,b,l,h \in \mathbb{Z},\ ah - bl = 1,\ l \equiv 0 \pmod N \right\}.$$

On suoraviivaista todeta, että $\Gamma_0(N)$ on modulaariryhmän aliryhmä.

Olkoon $p \in \mathbb{P}$ alkuluku. Luvuille $h = 0, 1, \ldots, p$ määritellään kuvaukset $\gamma_h \in \Gamma$ seuraavasti: $\gamma_h(z) = -\frac{1}{z+h}$, kun $0 \leq h < p$, sekä $\gamma_p(z) = z$.

Lemma. *Olkoon p alkuluku sekä $\Gamma_0(p)$ tähän liittyvä kongruenssialiryhmä. Tällöin joukko $\{\gamma_h \mid 0 \leq h \leq p\}$ on sivuluokkien edustajisto modulo $\Gamma_0(p)$ ja siis Γ voidaan esittää erillisenä unionina:*

$$\Gamma = \bigcup_{h=0}^{p} \Gamma_0(p)\gamma_h.$$

Todistus. Kun $0 \leq h_1 < h_2 < p$, määrää alkion $\gamma_{h_1}\gamma_{h_2}^{-1}$ matriisi

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_2 - h_1 & 1 \end{pmatrix} \notin \Gamma_0(p).$$

Näin ollen alkiot γ_h ovat epäkongruentteja modulo $\Gamma_0(p)$. On vielä osoitettava, että jokaista sivuluokkaa edustaa jokin γ_h. Valitaan tätä varten

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),\ ac - bd = 1.$$

Jos $p \mid c$, on $\gamma \in \Gamma_0(p)\gamma_p$. Jos taas $p \nmid c$, on $(c, pa) = 1$, sillä determinanttiehdon perusteella $(c, a) = 1$. Näin ollen on sellaiset luvut α ja β, että $c\beta + ap\alpha = 1$. Tällöin

$$\begin{pmatrix} c & -a \\ p\alpha & \beta \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$$

Edelleen,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pr & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -a \\ p\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & bp\alpha + d\beta - pr \end{pmatrix}.$$

Valitsemalla r sopivasti saadaan väite. $\square$

Joukko

$$\mathcal{P} = \bigcup_{h=0}^{p} \gamma_h(\mathcal{F}),$$

on selvästi erillisten joukkojen unioni. Edellisestä lemmasta seuraa, että $\mathcal{P}$ ryhmän $\Gamma_0(p)$ perusalue. Määritellään $\iota_p(z) = -\frac{1}{pz}$. Huomaa, että kuvaus ι_p on involuutio, toisin sanoen $\iota_p(\iota_p(z)) = z$. *Fricken identiteetin* mukaan

$$\iota_p\Gamma_0(p) = \Gamma_0(p)\iota_p.$$

Kyseinen identiteetti seuraa yhtälöstä

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -pb & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Tällöin myös $\iota_p(\mathcal{P})$ on kongruenssialiryhmän $\Gamma_0(p)$ perusalue.

Lemma. *Hecken operaattorit $T(n)$ ovat Hermiten operaattoreita vektoriavaruudessa $L^2(\mathcal{F}, d\mu)$.*

Todistus. Aiempien lemmojen perusteella riittää osoittaa, että yhtälö

$$\langle T(p)f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, T(p)f_2 \rangle$$

on voimassa aina, kun $f_1,\ f_2 \in L^2(\mathcal{F}, d\mu)$. Esitetään $(T(p)f)(z)$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}(T(p)f)(z) &= p^{-\frac{1}{2}} \big(f(pz) + \sum_{h=0}^{p-1} f((z+h)/p) \big) \\ &= p^{-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{p} f(\iota_p \gamma_h(z)).\end{aligned}$$

Edellä on huomattava, että $f(pz) = f(-\frac{1}{pz})$, sillä peilaus $z \mapsto -\frac{1}{z}$ on modulaariryhmän alkio. Seuraava päättelyketju on suoraviivainen:

$$\begin{aligned}
& \langle T(p)f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, T(p)f_2 \rangle \\
\iff & \int_{\mathcal{F}} p^{-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{p} f_1(\iota_p\gamma_h(z)) \overline{f_2(z)}\, d\mu = \int_{\mathcal{F}} f_1(z) \overline{p^{-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{p} f_2(\iota_p\gamma_h(z))}\, d\mu \\
\iff & \sum_{h=0}^{p} \int_{\mathcal{F}} f_1(\iota_p\gamma_h(z)) \overline{f_2(z)}\, d\mu = \sum_{h=0}^{p} \int_{\mathcal{F}} f_1(z) \overline{f_2(\iota_p\gamma_h(z))}\, d\mu \\
\iff & \sum_{h=0}^{p} \int_{\gamma_h(\mathcal{F})} f_1(\iota_p(z)) \overline{f_2(z)}\, d\mu = \sum_{h=0}^{p} \int_{\gamma_h(\mathcal{F})} f_1(z) \overline{f_2(\iota_p(z))}\, d\mu \\
\iff & \int_{\mathcal{P}} f_1(\iota_p(z)) \overline{f_2(z)}\, d\mu = \int_{\mathcal{P}} f_1(z) \overline{f_2(\iota_p(z))}\, d\mu \\
\iff & \int_{\mathcal{P}} f_1(\iota_p(z)) \overline{f_2(z)}\, d\mu = \int_{\iota_p(\mathcal{P})} f_1(\iota_p(z)) \overline{f_2(z)}\, d\mu.
\end{aligned}$$

Fricken identiteetistä seuraa, että funktio $f_1(\iota_p(z))$ on $\Gamma_0(p)$-automorfinen. Näin ollen väite seuraa siitä että kaikille $\Gamma_0(p)$-automorfisille funktioille f pätee

$$\int_{\mathcal{P}} f(z)\, d\mu = \int_{\iota_p(\mathcal{P})} f(z)\, d\mu.$$

□

Palautetaan mieleen tulos (Motohashi, lemma 1.4)

Lemma. *Mikäli* $f \in C^2 \cap L^2(\mathcal{F}, d\mu)$ *toteuttaa* $\Delta f = (\frac{1}{4} + \kappa^2)f$, *missä* $\operatorname{Im}\kappa \geq 0$, $\kappa \neq \frac{1}{2}i$, *niin*

$$f(z) = y^{\frac{1}{2}} \sum_{n \neq 0} \rho(n) K_{i\kappa}(2\pi |n| y) e(nx).$$

Kehitelmä suppenee itseisesti.

Operaattorit Δ ja $T(n)$ kommutoivat, joten tunnetusti voidaan valita sellainen ortonormaali joukko $\{\psi_j \mid j \in \mathbb{N}\}$,

$$\psi_j(z) = y^{\frac{1}{2}} \sum_{n \neq 0} \rho(n) K_{i\kappa_j}(2\pi |n| y) e(nx), \tag{5}$$

että

$$T(n)\psi_j = t_j(n)\psi_j.$$

Edelleen,

$$\begin{aligned} t_j(n)\langle \psi_j, \psi_j \rangle &= \langle t_j(n)\psi_j, \psi_j \rangle = \langle T(n)\psi_j, \psi_j \rangle \\ =&\langle \psi_j, T(n)\psi_j \rangle = \overline{\langle T(n)\psi_j, \psi_j \rangle} = \overline{t_j(n)}\langle \psi_j, \psi_j \rangle, \end{aligned}$$

josta $t_j(n) = \overline{t_j(n)}$, siis $t_j(n)$ on reaalinen. Sivun 2 lemmasta seuraa, että luvuille $t_j(n)$ pätee

$$t_j(m)t_j(n) = \sum_{d|(n,m)} t_j(\frac{mn}{d^2}). \tag{6}$$

Selvästi Hecken operaattorit kommutoivat involuution $I : f(z) \mapsto f(-\overline{z})$ kanssa. Näin ollen

$$\psi_j(-\overline{z}) = I\psi_j(z) = \epsilon_j \psi_j(z),$$

missä $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$.

Lemma. *Kaikille* $j \geq 1$, $m, n \neq 0$ *pätee*

$$t_j(n)\rho_j(m) = \sum_{d|(m,n)} \rho_j(\frac{mn}{d^2}). \tag{7}$$

Todistus. Lasketaan lauseke $(T(n)\psi_j)(z)$ eksplisiittiseesti:

$$\begin{aligned} &(T(n)\psi_j)(z) \\ =&\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n} \sum_{b\ (d)} \psi_j((az+b)/d) \\ =&\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n} \sum_{b\ (d)} \sqrt{\frac{ay}{d}} \sum_{m \neq 0} \rho_j(m) K_{i\kappa_j}(2\pi |m| \frac{ay}{d}) e(\frac{amx}{d}) e(\frac{bm}{d}) \\ =&\sqrt{\frac{y}{n}} \sum_{ad=n} \sqrt{a/d} \sum_{m=0} \rho_j(m) K_{i\kappa_j}(2\pi |m| \frac{y}{d}) e(\frac{amx}{d}) \sum_{b\ (d)} e(\frac{bm}{d}). \end{aligned}$$

Viimeinen summalauseke on nolla, mikäli m ei ole d:n monikerta. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&(T(n)\psi_j)(z) \\
=&\sqrt{\frac{y}{n}}\sum_{ad=n}\sqrt{ad}\sum_{m\neq 0}\rho_j(dm)K_{i\kappa_j}(2\pi a\,|m|\,y)e(amx) \\
=&\sqrt{y}\sum_{ad=n}\sum_{m\neq 0}\rho_j(dm)K_{i\kappa_j}(2\pi a\,|m|\,y)e(amx) \\
=&\sqrt{y}\sum_{m\neq 0}\sum_{ad=n}\sum_{am'=m}\rho_j(dm')K_{i\kappa_j}(2\pi\,|m|\,y)e(mx) \\
=&\sqrt{y}\sum_{m\neq 0}\sum_{ad=n}\sum_{a,'=m}\rho_j(\frac{dm}{a})K_{i\kappa_j}(2\pi\,|m|\,y)e(mx) \\
=&\sqrt{y}\sum_{m\neq 0}\sum_{a|(m,n)}\rho(\frac{mn}{a^2})K_{i\kappa_j}(2\pi\,|m|\,y)e(mx)
\end{aligned}
$$

Toisaalta myös

$$
\begin{aligned}
&(T(n)\psi_j)(z) = t_j(n)\psi(z) \\
=&\sqrt{y}\sum_{m\neq 0}t_j(n)\rho_j(m)K_{i\kappa_j}(2\pi\,|m|\,y)e(mx).
\end{aligned}
$$

Väite saadaan nyt kertoimia vertailemalla. □

Sijoittamalla lemman yhtälöön $m = 1$ saadaan erityisesti

$$t_j(n)\rho_j(1) = \rho_j(n). \tag{8}$$

Kaavasta (8) seuraa, että $\rho_j(1) \neq 0$

Lemma. *Kaikille $j \geq 1$ ja $m \neq 0$ pätee*

$$\rho_j(m) = \epsilon_j\rho_j(-m). \tag{9}$$

Todistus. Väite saadaan vertailemalla seuraavien lausekkeiden kertoimia:

$$
\begin{aligned}
I\psi_j(z) &= \sqrt{y}\sum_{m\neq 0}\rho_j(m)K_{i\kappa_j}(2\pi\,|m|\,y)e(-mx) \\
&= \sqrt{y}\sum_{m\neq 0}\rho_j(-m)K_{i\kappa_j}(2\pi\,|m|\,y)e(mx)
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
I\psi_j(z) =&\epsilon_j\psi_j(z) \\
=&\sqrt{y}\sum_{m\neq 0}\epsilon_j\rho_j(m)K_{i\kappa_j}(2\pi\,|m|\,y)e(mx).
\end{aligned}
$$

□

Tuloksesta (Motohashi, lemma 2.4)

$$\sum_{\frac{K}{2}<\kappa_j\leq K}|\rho_j(m)|^2 e^{-\pi\kappa_j} \ll K^2 + d_3(m)m^{\frac{1}{2}}\log(2m)$$

seuraa, että aina kun $\alpha > \frac{1}{4}$, on

$$|\rho_j(m)| \ll \tau m^\alpha,$$

missä τ on riippumaton luvun α valinnasta. Jos nimittäin olisi sellainen $\alpha > \frac{1}{4}$, että kaikille positiiviluvuille C olisi voimassa

$$\rho_j(m) > Cm^\alpha$$

kun n on kyllin suuri, saataisiin

$$\sum_{\frac{K}{2}<\kappa_j\leq K} |\rho_j(m)|^2 e^{-\pi\kappa_j} > C^2 n^{2\alpha} \sum_{\frac{K}{2}<\kappa_j\leq K} e^{-\pi\kappa_k}.$$

Lemma. *Kaikille $j \geq 1$ on voimassa*

$$|t_j(n)| \ll n^{\frac{1}{4}+\delta},$$

missä δ on mielivaltainen positiiviluku. Merkintään sisältyvä vakio riippuu vain luvun δ valinnasta.

Todistus. On voimassa

$$|\rho_j(1)|\,|t_j(n)| \leq \tau n^\alpha,$$

kun $\alpha > \frac{1}{4}$. Sijoittamalla kaavaan (6) $m = n$ saadaan

$$(t_j(n))^2 = \sum_{d|n} t_j\big((\frac{n}{d}^2)\big). \tag{10}$$

Tällöin on

$$\begin{aligned} |\rho_j(1)|\,|t_j(n)|^2 =& \sum_{d|n} |\rho_j(1)|\,\big|t_j((n/d)^2)\big| \\ \leq& \sum_{d|n} \tau n^{2\alpha} d^{-2\alpha} \\ =& \tau n^{2\alpha}\sigma_{-2\alpha}(n), \end{aligned}$$

josta seuraa epäyhtälö

$$|\rho_j(1)|\,|t_j(n)| \leq \tau^{\frac{1}{2}} n^\alpha\, |\rho_j(1)|^{\frac{1}{2}}\, |\xi_{2\alpha}(n)|^{\frac{1}{2}}\,, \tag{11}$$

missä

$$\xi_\beta(n) = \prod_{\substack{p|n \\ p\in\mathbb{P}}} \frac{1}{1-p^{-\beta}} \geq \sigma_{-\beta}(n).$$

Todistetaan induktiolla, että on voimassa

$$|\rho_j(1)|\,|t_j(n)| \leq \tau^{2^{-r}}\, |\rho_j(1)\xi_{2\alpha}(n)|^{1-2^{-r}}\, n^\alpha$$

aina, kun $r \in \mathbb{N}$. Antamalla r:n kasvaa tässä rajatta saadaan

$$|t_j(n)| \leq \xi_{2\alpha}(n) n^{\alpha},$$

ja väite seuraa, kun näytetään, että $\xi_\beta(n) \ll n^\epsilon$ kaikille positiiviluvuille ϵ ja kiinteälle luvulle $\beta > \frac{1}{2}$.

Induktion lähtökohta saadaan kaavasta (11). Kaavan (10) ja induktio-oletuksen mukaan

$$\begin{aligned}
|\rho_j(n)|\,|t_j(n)|^2 =& \sum_{d|n} |\rho_j(1)|\,\left|t_j\big((n/d)^2\big)\right| \\
\leq& \sum_{d|n} \tau^{2^{-r}} \left|\rho_j(1)\xi_{2\alpha}\big((n/d)^2\big)\right|^{1-2^{-r}} n^{2\alpha} d^{-2\alpha} \\
=& \tau^{2^{-r}} n^{2\alpha} |\rho_j(1)|^{1-2^{-r}} \sum_{d|n} \big(\xi_{2\alpha}\big((n/d)^2\big)\big)^{1-2^{-r}} d^{-2\alpha}.
\end{aligned}$$

Lopullisen arvion saamiseksi tarkastellaan viimeisimmässä lausekkeessa esiintyvää summaa:

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|n} \xi_\sigma\big((n/d)^2\big)^{1-2^{-r}} d^{-\sigma} \\
=& \sum_{d|n} \prod_{p|(n/d)^2} \Big(\frac{1}{1-p^{-\sigma}}\Big)^{1-2^{-r}} d^{-\sigma} \\
=& \sum_{d|n} \prod_{p|(n/d)} \Big(\frac{1}{1-p^{\sigma}}\Big)^{1-2^{-r}} d^{-\sigma} \\
\leq& \sum_{d|n} d^{-\sigma} \prod_{p|n} \Big(\frac{1}{1-p^{-\sigma}}\Big)^{1-2^{-r}} \\
\leq& \prod_{q|n} (1 + q^{-\sigma} + q^{-2\sigma} + \dots) \prod_{p|n} \Big(\frac{1}{1-p^{-\sigma}}\Big)^{1-2^{-r}} \\
=& \xi_\sigma(n)^{2-2^{-r}}.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä edelliset tulokset saadaan

$$|\rho_j(1)|\,|t_j(n)|^2 \leq \tau^{2^{-r}} |\rho_j(1)|^2 \, \xi_{2\alpha}(n)^{2-2^{-r}} n^{2\alpha},$$

mistä induktioväite seuraa.

Arvioidaan lopuksi lauseketta

$$\xi_\beta(n) = \prod_{p|n} \frac{1}{1-p^\beta},$$

missä $\beta > \frac{1}{2}$. Saadaan

$$\xi_\beta(n) < \prod_{p|n} \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{p}}} = \prod_{p|n} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}-1}.$$

Tulossa esiintyvä lauseke on selvästi vähenevä p:n funktiona, ja koska luvulla n on korkeintaan $\log_2 n$ alkutekijää, saadaan arvio

$$\xi_\beta(n) \le \prod_{i=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{p_i}-1},$$

missä p_i on suuruusjärjestyksessä i:s alkuluku. Tästä saadaan

$$\xi_\beta(n) \le c_k \prod_{i=k}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} M_i \le c_k' M_k^{\log_2 n} = c_k' n^{\log_2 M_k}.$$

Luvuille, joilla on vähemmän kuin k alkutekijää, saadaan triviaali yläraja-arvio. Muille luvuille väite seuraa siitä että $\log_2 M_k$ saadaan mielivaltaisen pieneksi. $\square$

Siirrytään tarkastelemaan painoa $2k$ olevien holomorfisten kärkimuotojen avaruutta $\mathcal{C}_k(\Gamma)$. Näille määritellään Hecken operaattori $T_k(n)$ ehdolla

$$\begin{aligned}(T_k(n)f)(z) =& n^{-\frac{1}{2}} \sum_{ad=n} (a/d)^k \sum_{b=1}^{d} f((az+b)/d) \\ =& n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu} f(M_\nu z)(\frac{d}{dz} M_\nu(z))^k\end{aligned}$$

Osoitetaan, että näin saadaan myös painoa $2k$ oleva kärkimuoto. Tätä varten valitaan $\gamma \in \Gamma$ ja kirjoitetaan

$$\begin{aligned}(T_k(n)f)(\gamma z) =& n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu} f(M_\nu(\gamma z))\Big(\frac{d}{dz} M_\nu(\gamma z)\Big)^k \\ =& n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu} f((M_\nu\gamma)(z))\Big(\frac{d}{dz}(M_\nu\gamma)(z)\Big)^k \jmath(\gamma,z)^{2k} \\ =& n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu} f((\tau_\nu M_\nu)(z))\Big(\frac{d}{dz}(\tau_\nu M_\nu)(z)\Big)^k \jmath(\gamma,z)^{2k} \\ =& n^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu} \jmath(\tau_\nu, M_\nu z)^{2k} f(M_\nu z)\Big(\jmath(\tau_\nu, M_\nu z)^{-2}\frac{d}{dz} M_\nu z\Big)^k \\ =& (T_k(n)f)(z)\jmath(\gamma,z)^{2k}.\end{aligned}$$

Selvästi $T_k(n)f$ häviää äärettömyydessä.

Kuten painoa nolla oleville kärkimuodoille, voidaan myös yleisemmin johtaa tulokset

$$T_k(m)T_k(n) = \sum_{d|(m,n)} T_k(\frac{mn}{d^2})$$

ja

$$\langle T_k(n)f_1, f_2\rangle_k = \langle f_1, T_k(n)f_2\rangle_k \quad f_1, f_2 \in \mathcal{C}_k(\Gamma).$$

Samoin saadaan ominaisvektorit

$$\psi_{j,k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{j,k}(n) n^{k-\frac{1}{2}} e(nz), \quad 1 \le j \le \vartheta(k),$$

jotka muodostavat avaruuden $\mathcal{C}_k(\Gamma)$ ortonormaalin kannan. Palautetaan mieleen, että $\vartheta(k) = \dim \mathcal{C}_k(\Gamma)$ on äärellinen,

$$\vartheta(k) = \begin{cases} 0 & \text{jos k=1,} \\ \lfloor k/6 \rfloor - 1 & \text{jos } k \equiv 1 \pmod 6,\ k \neq 1 \\ \lfloor k/6 \rfloor & \text{jos } k \not\equiv 1 \pmod 6. \end{cases}$$

Merkitään

$$T_k(n)\psi_{j,k} = t_{j,k}(n)\psi_{j,k}.$$

Ominaisarvot $t_{j,k}(n)$ ovat reaalisia ja niitä kutsutaan Hecken ominaisarvoiksi. Samoin kuin edellä, voidaan johtaa tulos

$$\rho_{j,k}(n) = \rho_{j,k}(1)t_{j,k}(n).$$

Myös arvio $t_{j,k}(n) \ll n^{\frac{1}{4}+\delta}$ on voimassa.