

Insinöörimatematiikka 1

Demonstraatio 1, 7.9.2021

Demoryhmät ja -käytännöt ilmoitetaan kurssin nettisivulla viikonlopun aikana. Ainaakin etäryhmään on jokaiselle taattu pääsy haluamaansa aikana.

1. Latinalaiset aakkoset on kehitetty kreikkalaisen aakkoston pohjalta ja niinpä käännökset $\alpha \mapsto a, \beta \mapsto b, \gamma \mapsto g, \dots$ ovat usein suoraviivaisia. Tosin kreikkalaisen aakkoston kirjaimet ξ, θ, χ ja ψ translitteroidaan suomen kieleen yleensä konsonaattipareina ks, th, kh ja ps.

Kirjoita latinalaisin aakkosin *Ἀνδρά μοι ἐννεπε, μουσα, πολυτροπον, ὅς μ' ἀλλὰ πολλὰ πλαγχθῇ, ἐπεὶ Τροίης ἱερὸν πτολιεθρον ἐπερσευ*.

Vastaus: Andra moi ennepe mousa, polutropon, os mala polla, plagkhthe epei Troies ieron ptoliethron epersen (Alkusäkeet teoksesta Odysseia). Parempi translitterointi saadaan kuitenkin ottamalla paremmin huomioon kielten ominaispiirteitä.

2. Esitä jokin tulkinta, jossa logiikan kaava $(x + y = x + z) \rightarrow (y = z)$ ei ole tosi. Ohje: Symbolia $+$ ei tarvitse tulkita tavalliseksi yhteenlaskuksi, vaan voit keksiä sille jonkin vaihtoehtoisen tulkinnan.

Vastaus (esim.): Jos sovitaan symbolin $+$ tarkoittavan tavallista kertolaskua $\cdot$, on kaava

$$(0 \cdot 1 = 0 \cdot 2) \rightarrow (1 = 2)$$

epätosi.

3. Kirjoita summa

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{3486784401}$$

käyttämällä Σ -merkintää.

Vastaus:

$$\sum_{i=0}^{20} \frac{1}{3^i}$$

4. Kirjoita logiikan kaava, joka väittää, että yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua. Ohje: yksi mahdollisuus on ilmaista että x^2 ei ole yhtäsuuri kuin 2 kaikilla x :n arvoilla.

Vastaus:

$$(\forall x)(x^2 \neq 2).$$

Toinen vaihtoehto:

$$(\forall x)\neg(x^2 = 2).$$

Kolmas vaihtoehto:

$$\neg(\exists x)(x^2 = 2).$$

5. Kirjoita logiikan kaava, joka väittää, että yhtälöllä $x^n + y^n = z^n$ ei ole ratkaisua, kun $n > 2$.

Vastaus:

$$(\forall n)(n > 2 \rightarrow \neg(\exists x, y, z)(x^n + y^n = z^n))$$

6. Kirjoita summa $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{100}$ käyttämällä Σ -merkintää.

Vastaus:

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{(-1)^{i-1}}{i}.$$

7. Kirjoita summa $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 999$ käyttämällä Σ -merkintää.

Vastaus:

$$\sum_{k=0}^{499} (2k+1)$$

8. Jos A on mikä hyvänsä joukko, sen *potenssijoukkoa* merkitään 2^A ja määritellään A :n osajoukkojen joukoksi. Symbolein ilmaistuna,

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Määritä 2^A joukoille $A = \{1\}$, $A = \{1, 2\}$ ja $A = \{1, 2, 3\}$. Laske potenssijoukkojen alkioden lukumäärät. Huomaa, että $\emptyset \subseteq A$, olipa A mikä hyvänsä joukko.

Vastaus: $2^{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\}$, $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ja

$2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Alkioden määrät ovat 2, 4 ja 8.

9. Selvitä binomikaavaa käyttämällä mikä on termin x^{14} kerroin kun lauseke

$$(2x^2 - \frac{1}{x})^{30}.$$

kerrotaan auki.

Vastaus:

$$(2x^2 - \frac{1}{x})^{30} = \sum_{i=0}^{30} \binom{30}{i} (2x^2)^{30-i} (-\frac{1}{x})^i = \sum_{i=0}^{30} \binom{30}{i} 2^{30-i} (-1)^i x^{60-3i}.$$

Termi x^{14} siis saavutetaan, kun $60 - 3i = 14 \Leftrightarrow 46 = 3i$, mikä toteutuu vain arvolla $i = \frac{46}{3}$. Koska i saa vain kokonaislukuarvoja, ei tämä tule kysymykseen, joten termin x^{14} kerroin on 0.

10. Selvitä voiko yhtälöllä $x^4 = 2$ olla ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.

Vastaus: Jos yhtälöllä olisi rationaalinen ratkaisu $\frac{a}{b}$, olisi

$$((\frac{a}{b})^2)^2 = 2,$$

jolloin siis yhtälöllä $x^2 = 2$ olisi rationaalinen ratkaisu $(\frac{a}{b})^2$. Näin ei kuitenkaan voi olla luennolla esitetyn perusteella.