

Insinöörimatematiikka 1

Demonstraatio 2, 14.9.2021

Katso luennon 8.9. korvaava taltiointi ja lue monisteen luku 2.2. Seuraavissa tehtävissä voi käyttää taltioinnissa ja monisteessa esitettyä lausetta, jonka mukaan $(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$.

1. Selvitä miten kunta-aksioomista seuraa että $(-1)a = -a$, siis että a :n vastaluku saadaan luvun 1 vastaluvulla (-1) kertomalla. Ohje: Selvitä aksioomien perusteella mitä on $a + (-1)a$ ja nojaudu taltioinnissa esitettyyn vastaluvun yksikäsitteisyyteen.

Vastaus:

$$a + (-1)a = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a \cdot (1 + (-1)) = a \cdot 0 = 0.$$

Näin ollen $(-1)a$ on a :n vastaluku $-a$.

Huomautus: Tässä ja seuraavissa mallivastauksissa ei ole aina mainittu mitä aksioomaa missäkin kohdassa on käytetty, tämä jää lukijan tehtäväksi tarkistaa. Lisäksi saatetaan sivuuttaa joitakin aksioomista helposti seuraavia asioita, kuten esimerkiksi distributiivilain muoto $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ sekä $-(-a) = a$ (mieti hetki miksi vastaluvun vastaluku on luku itse). Myöskään sulkeiden käytössä ei olla turhan tarkkoja.

2. Selvitä miten reaalityyppisten lukujen aksioomista seuraa, että $1 > 0$. Ohje: Väite merkitsee sitä, että $1 \in \mathbb{R}_+$. Sen vastakohta merkitsisi sitä, että $-1 \in \mathbb{R}_+$. Valitse jokin $a \in \mathbb{R}_+$ ja mieti mitä seuraisi ehdoista $-1 \in \mathbb{R}_+$ ja $a \in \mathbb{R}_+$ edellisen tehtävän valossa.

Vastaus: Tehdään vastaoletus, jonka mukaan väite ei pidä paikkansa, jolloin $-1 \in \mathbb{R}_+$. Valitaan sitten jokin $a \in \mathbb{R}_+$, jolloin toisen järjestysaksiooman perusteella $(-1)a \in \mathbb{R}_+$. Toisaalta edellisen tehtävän perusteella $(-1)a = -a$, mikä tarkoittaisi sitä että sekä $a \in \mathbb{R}_+$ että $-a \in \mathbb{R}_+$. Tämä on vastoin ensimmäistä järjestysaksioomaa.

3. Selvitä miten aksioomista seuraa, että $(-1)(-1) = 1$. Ohje: Voit aloittaa yhtälöstä

$$1 = 1 + (1 + (-1))(1 + (-1))$$

(miksi?)

Vastaus:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0 = 1 + 0 \cdot 0 = 1 + (1 + (-1))(1 + (-1)) \\ &= 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-1)(-1) \\ &= 1 + 1 + (-1) + (-1) + (-1)(-1) = (-1)(-1). \end{aligned}$$

Toinen tapa: Ominaisuuden $-(-a) = a$ ja edellisten tehtävien perusteella $(-1)(-1) = -(-1) = 1$.

4. Olkoon $x > y$ ja $z < 0$. Selvitä, miten aksioomista seuraa $xz < yz$.

Vastaus: Vastaus: $x > y$ tarkoittaa, että $x - y \in \mathbb{R}_+$ ja $z < 0$ että $-z \in \mathbb{R}_+$. Tällöin toisen järjestysaksiooman perusteella $-z(x - y) \in \mathbb{R}_+$ ja aiempien tehtävien perusteella $yz - xz = -z(x - y) \in \mathbb{R}_+$. Tämä merkitsee sitä, että $yz > xz$.

Huomautus: Tehtävässä on näytetty aksiomatiikasta lähtöisin että kerrottaessa epäyhtälö negatiivisella luvulla pitää epäyhtälömerkin suunta vaihtaa.

5. Miten tehtävistä 1–3 seuraa, että yhtälöllä $x^2 = -1$ ei voi olla ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$? Ohje: Osoita, että reaaliarvon neliö ei voi olla negatiivinen.

Vastaus: Jos $x \in \mathbb{R}_+$, on $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}_+$ toisen järjestysaksiooman perusteella. Luennon korvaavassa taltioinnissa esitetyn lauseen perusteella taas $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$. Jos taas $-x \in \mathbb{R}_+$, on $(-x)^2 = (-x)(-x) \in \mathbb{R}_+$, mutta $(-x)^2 = (-x)(-x) = (-1)x(-1)x = (-1)(-1)x^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$. Näin ollen kaikissa tapauksissa $x^2 \geq 0$. Koska $-1 \notin \mathbb{R}_+$, ei yhtälöllä $x^2 = -1$ ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$.

6. Luennolla todettiin, että funktio $f : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ on bijektio. Minkälainen lauseke on käänteisfunktio $f^{-1} : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$? Ohje: Merkitse $y = \frac{1}{1+x^2}$ ja ratkaise tästä x . Tarkista lopuksi laskemalla mitä ovat $(f \circ f^{-1})(x)$ ja $(f^{-1} \circ f)(x)$.

Vastaus:

$$y = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow y + yx^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1-y}{y},$$

josta $x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}$ (Mieti miksi plus-merkki).

Näin ollen $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ on käänteisfunktion lauseke.

Tarkistus:

$$(f \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}} = \frac{x}{x + 1 - x} = x$$

ja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}}} = \sqrt{1 + x^2 - 1} = |x| = x$$

(Mieti mistä viimeisin yhtäsuuruus johtuu).

7. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2x + x^2$. Selvitä onko f injektio tai surjektio. Etsi sellaiset mahdollisimman laajat joukot A ja $B \subseteq \mathbb{R}$, että $f : A \rightarrow B$ on bijektio. Määritä myös lauseke funktiolle $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Vastaus: $f(x) = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2 \geq 0$, mistä voidaan huomata että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ei ole surjektio, koska f ei saa negatiivisia arvoja. Funktio f ei myöskään ole injektio, koska esimerkiksi $f(0) = 1 = f(-2)$.

Bijektiivisyys voidaan saavuttaa esimerkiksi asettamalla lähtöjoukoksi $A = [-1, \infty)$ ja maalijoukoksi $B = [0, \infty)$.

Jos merkitään $y = f(x)$, saadaan yhtälöstä $y = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2$ ja tästä saadaan $x = \sqrt{y} - 1$. Näin ollen käänteisfunktio $f^{-1} : B \rightarrow A$ on lauseke $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$.

8. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Etsi sellaiset mahdollisimman laajat joukot A ja B , että $f : A \rightarrow B$ on bijektio. Etsi myös lauseke funktiolle $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Vastaus: Kun merkitään $f(x) = y$, yhtälöstä

$$y = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$$

saadaan funktiolle f^{-1} lauseke (vaihtamalla y :n ja x :n roolit)

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Edellä mainitun perusteella voidaan todeta, että f saa kaikki reaaliarvot lukuunottamatta lukua $y = -1$. Muilla arvoilla taas voidaan kiinnittää yksikäsitteinen alkukuva.

Näin ollen mahdollisimman suuret joukot ovat $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ja $B = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

9. Ravinneliuoksessa elävien bakteerien määrä kaksinkertaistuu joka 4. tunti. Ajanhetkellä $t = 0$ bakteerit täyttävät yhden mikrolitran tilavuuden. Kuinka kauan kestää että bakteerit täyttävät yhden litran tilavuuden? Entä kahden litran tilavuuden?

Vastaus: Mallin mukaisesti bakteerien tilavuus voidaan esittää muodossa

$$V_t = 2^{\frac{t}{4}} V_0,$$

missä $V_0 = 1$ μl on alkutilavuus kun $t = 0$ ja V_t tilavuus ajanhetkellä t (aika mitattuna tunneissa). Ensimmäistä kysymystä varten pitää selvittää millä ajanhetkellä t on

$$1\text{ l} = 2^{\frac{t}{4}} \mu\text{l} \Leftrightarrow 10^6 = 2^{\frac{t}{4}} \Leftrightarrow \frac{t}{4} = \log_2 10^6 \Leftrightarrow t = 4 \cdot 6 \log_2 10 = 79,726 \dots$$

Toista kysymystä varten voidaan todeta, että koska bakteerien määrä kaksinkertaistuu joka 4. tunti, on määrään 2 l vaadittava aika $4 + 79,726 \dots = 83,726 \dots$ h.

Sama tulos saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$2\text{ l} = 2^{\frac{t}{4}} \mu\text{l} \Leftrightarrow 2 \cdot 10^6 = 2^{\frac{t}{4}} \Leftrightarrow \frac{t}{4} = \log_2 2 \cdot 10^6 \Leftrightarrow t = 4 \cdot (6 \log_2 10 + \log_2 2) = 83,726 \dots$$

Mieti lopuksi mikä on bakteerimassan tilavuus, kun aikaa kuluu edelleen 4 tuntia ja saavutetaan ajanhetki $t = 87,726 \dots$ h.