

Insinöörimatematiikka 1

Demonstraatio 4, 28.9.2021

1. Seuraavassa päättelyketjussa osoitetaan, että polynomin $2x^5 - 10x^4 - 3x + 2$ arvo tulee miten suureksi hyvänsä (suuremmaksi kuin mikä tahansa $M > 0$), kunhan x valitaan riittävän suureksi. Oletetaan että $x \geq 13 > 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} 2x^5 - 10x^4 - 3x + 2 &\geq 2x^5 - 10x^4 - 3x^4 = 2x^5 - 13x^4 \\ &= 2x^5 \left(1 - \frac{13}{2x}\right) \geq 2x^5 \cdot \frac{1}{2} = x^5 > M, \end{aligned}$$

kunhan $x \geq \max\{13, \sqrt[5]{M}\}$. Selvitä tarkoin mistä jokainen arvio välivaiheissa johtuu ja esitä vastaava päättely polynomille $3x^6 - 20x^5 - 10x^4 + x^3 - 15x^2 - 6x - 1$

2. Valitaan $M > 0$. Selvitä mille x :n arvoille pätee $\frac{4}{x-3} > M$. Entä mille x :n arvoille pätee $\frac{4}{x-3} < -M$?
3. Miten lauseke $\frac{x+1}{x-3}$ käyttäytyy, kun $x \rightarrow 3$? Vaikuttaako siltä, että raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$ olisi olemassa?
4. Selvitä voiko raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ olla olemassa. Ohje: Tarkastele pisteitä $x = \frac{1}{\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.
5. Selvitä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$, mikäli se on olemassa. Ohje: $|\sin t| \leq 1$ aina kun $t \in \mathbb{R}$
6. Perustele oikeaksi seuraava väittämä: Välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio f , joka toteuttaa ehdon $f(a) < f(b)$ saa arvoikseen ainakin kaikki luvut välillä $[f(a), f(b)]$. Ohje: Valitse $c \in (f(a), f(b))$ ja tarkastele funktiota $g(x) = f(x) - c$. Totea funktion g jatkuvuus ja turvaudu luennolla esitettyyn Bolzanon lauseeseen.
7. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = (4x + 3)^8$.
8. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
9. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.