

Insinöörimatematiikka 1

Demonstraatio 4, 28.9.2021

1. Seuraavassa päättelyketjussa osoitetaan, että polynomin $2x^5 - 10x^4 - 3x + 2$ arvo tulee miten suureksi hyvänsä (suuremmaksi kuin mikä tahansa $M > 0$), kunhan x valitaan riittävän suureksi. Oletetaan että $x \geq 13 > 1$. Tällöin

$$\begin{aligned} 2x^5 - 10x^4 - 3x + 2 &\geq 2x^5 - 10x^4 - 3x^4 = 2x^5 - 13x^4 \\ &= 2x^5(1 - \frac{13}{2x}) \geq 2x^5 \cdot \frac{1}{2} = x^5 > M, \end{aligned}$$

kunhan $x \geq \max\{13, \sqrt[5]{M}\}$. Selvitä tarkoin mistä jokainen arvio välivaiheissa johtuu ja esitä vastaava päättely polynomille $3x^6 - 20x^5 - 10x^4 + x^3 - 15x^2 - 6x - 1$

Vastaus: Kun aluksi oletetaan, että $x > 1$ on $x^2 = x \cdot x > x$, $x^3 = x^2 \cdot x > x^2$, jne, jolloin

$$\begin{aligned} &3x^6 - 20x^5 - 10x^4 + x^3 - 15x^2 - 6x - 1 \\ &> 3x^6 - 20x^5 - 10x^5 - 15x^5 - 6x^5 - x^5 \\ &= 3x^6 - 52x^5 \\ &= 3x^6(1 - \frac{52}{3x}) \\ &\geq 3x^6 \frac{1}{3} = x^6 \geq M, \end{aligned}$$

kunhan $x > \max\{\sqrt[6]{M}, 26\}$. Ensimmäinen epäyhtälö johtuu siitä, että vähentäviä on itseisarvoltaan suurennettu ja positiiviset poistettu. Toinen epäyhtälö johtuu siitä, että x valitaan sitten että $x \geq 26$. Viimeisin epäyhtälö puolestaan on perua valinnasta $x \geq \sqrt[6]{M}$.

2. Valitaan $M > 0$. Selvitä mille x :n arvoille pätee $\frac{4}{x-3} > M$. Entä mille x :n arvoille pätee $\frac{4}{x-3} < -M$?

Vastaus: Jos $x > 3$, on $\frac{4}{x-3} > M \Leftrightarrow \frac{4}{M} > x-3 = d(x, 3)$. Jos taas $x < 3$, on $\frac{4}{x-3} < -M \Leftrightarrow \frac{4}{M} > 3-x = d(x, 3)$.

Huomautus: Tehtävässä on muodollisesti osoitettu, että $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{4}{x-3} = \infty$ ja että $\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{4}{x-3} = -\infty$.

3. Miten lauseke $\frac{x+1}{x-3}$ käyttäytyy, kun $x \rightarrow 3$? Vaikuttaako siltä, että raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$ olisi olemassa?

Vastaus: Kun $x \approx 3$, on $x+1 \approx 4$ ja osoittaja pysyy rajoitettuna kun x on luvun 3 lähistöllä. Tällöin arvoilla $x > 3$ on $\frac{x+1}{x-3} > 0$, mutta lauseke on itseisarvoltaan sitä suurempi mitä lähempänä x on lukua 3. Toisaalta arvoilla $x < 3$ on $\frac{x+1}{x-3} < 0$, mutta myös itseisarvoltaan sitä suurempi mitä lähempänä x on lukua 3. Näin ollen raja-arvoa ei vaikuta olevan olemassa pisteessä $x = 3$.

4. Selvitä voiko raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ olla olemassa. Ohje: Tarkastele pisteitä $x = \frac{1}{\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.

Vastaus: Pisteissä $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ on $\sin \frac{1}{x_n} = 1$ ja pisteissä $y_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ taas $\sin \frac{1}{y_n} = -1$. Koska molempia pisteitä, x_n ja y_n löytyy miten tahansa läheltä nollaa, ei raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ voi olla olemassa.

5. Selvitä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$, mikäli se on olemassa. Ohje: $|\sin t| \leq 1$ aina kun $t \in \mathbb{R}$

Vastaus: Raja-arvo on olemassa ja yhtäsuuri kuin nolla. Tämä nähdään seuraavasti:

$$d(x \sin \frac{1}{x}, 0) = \left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| = d(x, 0) < \epsilon,$$

kunhan $0 < d(x, 0) < \epsilon$.

6. Perustele oikeaksi seuraava väittämä: Välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio f , joka toteuttaa ehdon $f(a) < f(b)$ saa arvoikseen ainakin kaikki luvut välillä $[f(a), f(b)]$. Ohje: Valitse $c \in (f(a), f(b))$ ja tarkastele funktiota $g(x) = f(x) - c$. Totea funktion g jatkuvuus ja turvaudu luennolla esitettyyn Bolzanon lauseeseen.

Vastaus: Funktio g on kahden jatkuvan funktion summana jatkuva ja $g(a) = f(a) - c < 0$, mutta $g(b) = f(b) - c > 0$. Tällöin Bolzanon lauseen perusteella on olemassa sellainen luku $\xi \in (a, b)$, että $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = c$.

7. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = (4x + 3)^8$.

Vastaus: Ketjusäännön avulla saadaan

$$f'(x) = 8(4x + 3)^7 \cdot 4 = 32(4x + 3)^7$$

8. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Vastaus: Ketjusäännön perusteella

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

9. Määritä derivaattafunktio $f'(x)$, kun $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Vastaus: Kun $x \neq 0$, saadaan tulon derivointisäännön ja ketjusäännön perusteella

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}.$$

Kun $x = 0$, ei funktio ole määritelty. Jos halutaan tehtävän 5 perusteella määritellä $f(0) = 0$, pitää tarkastella erotusosamäärää

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot h \sin \frac{1}{h} = \sin \frac{1}{h},$$

jolle ei tehtävän 4 mukaan ole raja-arvoa kun $h \rightarrow 0$. Näin ollen derivaattaa ei pisteessä $x = 0$ voi olla olemassa.