

Insinöörimatematiikka 1

Demonstraatio 6, 12.10.2021

1. Olkoon f derivoituva funktio, joka toteuttaa ehdon $f(0) = 100$ ja differentiaaliyhtälön $f'(x) = -4f(x)$. Etsi funktiolle $f(x)$ eksplisiittinen lauseke.

Vastaus: Yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -4 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln |f(x)| = -4,$$

josta $\ln |f(x)| = -4x + C$. Näin ollen $|f(x)| = e^{-4x}e^C$. Sijoittamalla $x = 0$ saadaan $e^C = 100$. Funktio f on derivoituvana funktiona jatkuva, eikä jatkuva funktio voi vaihtaa merkkiään ilman nollakohtaa, jota funktiolla e^{-4x} ei ole. Näin ollen $(\forall x) f(x) > 0$ ja siksi $f(x) = 100e^{-4x}$.

2. Olkoon $f(x) = x^5 + 3x + 5$. Etsi funktion f nollakohdalle jokin likiarvo valistuneella arvauksella ja käytä Newtonin menetelmää tarkentaaksesi likiarvoa siten että kahdeksan desimaalia näyttäisi olevan oikein.

Vastaus: Helposti todetaan, että $f(-1) = 1$, jolloin $x_0 = -1$ vaikuttaisi olevan hyvä lähtöarvo nollakohdan likiarvolle. Iteroitava funktio on

$$g(x) = x - \frac{x^5 + 3x + 5}{5x^4 + 3}$$

ja $x_1 = g(x_0) = -1.125$, $x_2 = g(x_1) = -1.10891934447\dots$, $x_3 = g(x_2) = -1.10857566066\dots$, $x_4 = g(x_3) = -1.10857550806\dots$, $x_5 = g(x_4) = -1.10857550806\dots$, joten näyttää siltä että kahdeksan desimaalia on oikein jo neljännessä iteraatiossa x_4 .

3. Etsi funktiolle $f(x) = x^5 + 3x + 5$ astetta 5 oleva Taylorin polynomi pisteessä $x = 1$ esitysmuodossa

$$f(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + c_4(x-1)^4 + c_5(x-1)^5.$$

Minkä huomion voit tehdä, kun samalla tavalla etsit funktiolle f Taylorin polynomin pisteessä $x = 0$?

Vastaus: $f'(x) = 5x^4 + 3$, $f''(x) = 20x^3$, $f^{(3)}(x) = 60x^2$, $f^{(4)}(x) = 120x$ ja $f^{(5)}(x) = 120$. Tällöin $f(1) = 9$, $f'(1) = 8$, $f''(1) = 20$, $f^{(3)}(1) = 60$, $f^{(4)}(1) = 120$ ja $f^{(5)}(1) = 120$. Näin ollen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{9}{0!} + \frac{8}{1!}(x-1) + \frac{20}{2!}(x-1)^2 + \frac{60}{3!}(x-1)^3 + \frac{120}{4!}(x-1)^4 + \frac{120}{5!}(x-1)^5 \\ &= 9 + 8(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5. \end{aligned}$$

Laskemalla derivaatat pisteessä 0 havaitaan, että $f(0) = 5$, $f'(0) = 3$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 0$ ja $f^{(5)}(0) = 120$. Näin ollen Taylorin polynomi pisteessä 0 on

$$\frac{5}{0!} + \frac{3}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{120}{5!}x^5 = 5 + 3x + x^5.$$

Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$ on tavanomaisin polynomin esitysmuoto.

4. Etsi funktiolle $f(x) = \frac{1}{x+2}$ 5. asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $x = 0$.

Ohje: Ota nimittäjästä 2 yhteiseksi tekijäksi ja käytä funktion $\frac{1}{1-x}$ tunnettua Taylorin polynomia.

Vastaus:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^5}{32} + O(x^6) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} - \frac{x^5}{64} + O(x^6) \end{aligned}$$

kun $x \rightarrow 0$.

5. Etsi funktiolle $f(x) = \frac{1}{x+2}$ 5. asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $x = 3$.

Ohje: $x+2 = 5 + (x-3)$ ja edellisen tehtävän ohje.

Vastaus:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{5+x-3} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - (-\frac{x-3}{5})} \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{x-3}{5} + \left(\frac{x-3}{5}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{5}\right)^3 + \left(\frac{x-3}{5}\right)^4 - \left(\frac{x-3}{5}\right)^5 + O((x-3)^6) \right) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-3) + \frac{1}{125}(x-3)^2 - \frac{1}{625}(x-3)^3 + \frac{1}{3125}(x-3)^4 - \frac{1}{15625}(x-3)^5 + O((x-3)^6) \end{aligned}$$

kun $x \rightarrow 3$.

6. Etsi funktiolle $f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$ 5. asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $x = 0$. Ohje: Demo 5/teht. 7 ja edelliset tehtävät.

Vastaus:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{x}{2})} \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + O(x^6) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^4}{2^4} - \frac{x^5}{2^5} + O(x^6) \right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{5}{4}x + \frac{9}{8}x^2 - \frac{17}{16}x^3 + \frac{33}{32}x^4 - \frac{65}{64}x^5 + O(x^6) \end{aligned}$$

7. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^4) - e^{x^4} + 1}{2 \cos(x^2) - 2 + x^4}$$

käyttämällä Taylorin kehitelmiä.

Vastaus: Tunnettujen kehitelmien perusteella saadaan $\sin(x^4) = x^4 - \frac{1}{6}x^{12} + O(x^{20})$, $e^{x^4} = 1 + x^4 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{6}x^{12} + O(x^{16})$ ja $\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8 + O(x^{12})$.

Näistä arvioista saadaan

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin(x^4) - e^{x^4} + 1}{2 \cos(x^2) - 2 + x^4} \\
 = & \frac{x^4 - \frac{1}{6}x^{12} + O(x^{20}) - (1 + x^4 + \frac{1}{2}x^8 + O(x^{12})) + 1}{2(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8 + O(x^{12})) - 2 - x^4} \\
 = & \frac{-\frac{1}{2}x^8 + O(x^{12})}{\frac{1}{12}x^8 + O(x^{12})} \\
 = & \frac{-\frac{1}{2} + O(x^4)}{\frac{1}{12} + O(x^4)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = -6.
 \end{aligned}$$

8. Seuraavat joukot A ja B liittyvät erään integroituvan funktion ylä- ja alasummiin välillä $[0, 1]$.

$$A = \{1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Selvitä ovatko $\max A$ tai $\min A$ olemassa. Mitkä ovat $\sup A$ ja $\inf A$?

$$B = \{1 - \frac{3n-1}{2n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Selvitä ovatko $\max B$ tai $\min B$ olemassa. Mitkä ovat $\sup B$ ja $\inf B$?

Ohje: Tarkastele minkälaisia arvoja joukoissa A ja B esiintyy, kun $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Mieti arvoja, joissa $n \in \mathbb{N}$ kasvaa rajatta suuremmaksi.

Vastaus a): On erittäin helposti todettavissa, että $\frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}$ saadaan mielivaltaisen pieneksi kun n kasvaa (miksi?) Näin ollen joukon A alkiot ovat kaikki suurempia kuin 1, mutta riittävän suurella n :n arvolla on mahdollista päästä miten tahansa lähelle lukua 1.

Maksimiarvo 3 saavutetaan kun $n = 1$. Tällöin myös $\sup A = \max A$. Joukossa A ei ole olemassa minimiä, mutta arvo 1 on mahdollista saavuttaa mielivaltaisen läheltä.

Vastaus b) On myös mahdollista todeta, että $\frac{3n-1}{2n^2}$ on vähenevä, kun $n \geq 1$. Jos kuitenkin valitaan n liittävä suureksi, on mahdollista saada $1 - \frac{3n-1}{2n^2}$ niin lähelle lukua 1 kuin halutaan. Maksimiarvoa ei siis ole, mutta $\sup B = 1$. Minimiarvo (sama kuin infimum) saavutetaan kun $n = 1$.