

Insinöörimatematiikka 1

Demonstraatio 7, 2021

Huom: Näistä demoista ei saa suorituspisteitä, mutta tehtäviä on silti syytä harjoitella itsenäisesti.

1. Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y = \sqrt[3]{x}$ ja $y = x^2$.

Vastaus:

$$A = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^2) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

2. Laske pinta-ala 1. neljänneksen alueelle, jota rajoittavat käyrät $y = x^4$ ja $y = \sqrt{x}$.

Vastaus:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^4) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^5 \right) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}.$$

3. Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat suora $y = x$ ja käyrä $y = x^4$.

Vastaus:

$$A = \int_0^1 (x - x^4) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

4. Laske tilavuus kappaleelle, joka syntyy, kun välille $x \in [0, 4]$ rajoitettu käyrä $y = \sqrt[4]{x}$ pyörittää x -akselin ympäri.

Vastaus:

$$V = \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 \sqrt{x} dx = \pi \int_0^4 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{16\pi}{3}.$$

5. Laske tilavuus kappaleelle, joka syntyy kun välille $y \in [0, 4]$ rajoitettu käyrä $y = x^3$ pyörittää y -akselin ympäri.

Vastaus:

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 y^{\frac{2}{3}} x^6 dy = \pi \int_0^4 \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} dy = \frac{3\pi}{5} 4^{\frac{5}{3}} = \frac{24\pi\sqrt[3]{2}}{5}.$$

6. Laske käyrän $y = \frac{1}{12x} + x^3$ välille $1 \leq x \leq 3$ jäävän osan pituus.

Vastaus: Kysytty pituus voidaan esittää integraalina

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx &= \int_1^3 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{12x^2} + 3x^2\right)^2} dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{144x^4} - \frac{1}{2} + 9x^4} dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{12x^2} + 3x^2\right)^2} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{12x^2} + 3x^2\right) dx \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{1}{12x} + x^3\right) dx = \frac{469}{18}. \end{aligned}$$

7. Oletetaan tunnetuksi, että R -säteisen ympyrän kehän pituus on $2\pi R$. Selvitä mikä on R -säteisen ympyrän pinta-ala. Ohje: Sovella Newtonin ja Leibnizin intuitiota R -säteisen ympyrän pinta-alan määrittämiseksi. Ajattele ympyrä jaettavaksi äärettömän moneen äärettömän kapeaan renkaaseen, joiden kaikkien keskipisteenä on alkuperäisen ympyrän keskipiste. Jos kunkin renkaan leveys on dr , mikä on "äärettömän kapean" renkaan pinta-ala?

Vastaus: r -säteisen ympyrän kehän pituus on $2\pi r$, ja siihen liittyvän äärettömän kapean renkaan ala $dA = 2\pi r dr$, joten koko ympyrän ala on

$$A = \int_0^R dA = \int_0^R 2\pi r dr = \int_0^R \pi r^2 = \pi R^2.$$

8. Suppenevatko seuraavat integraalit?

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \quad \text{b) } \int_0^\infty \frac{x^8}{x^9+1} dx \quad \text{c) } \int_2^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} dx$$

Vastaus: a) Suurilla x :n arvoilla integrandi on likimain $\frac{1}{\sqrt{x}}$, joten valitaan vertailufunktioksi $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, jolle vastaava integraali hajaantuu. Osamäärien raja-arvoksi saadaan

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1,$$

joten myös alkuperäinen integraali hajaantuu.

b) Suurilla x :n arvoilla integrandi on likimain $\frac{1}{x}$, joten valitaan tämä vertailufunktioksi. Sille vastaava integraali hajaantuu ja

$$\frac{1}{x} : \frac{x^8}{x^9+1} = \frac{x^9+1}{x^9} = 1 + \frac{1}{x^9} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1,$$

joten myös alkuperäinen integraali hajaantuu.

c) Suurilla x :n arvoilla integrandi on likimain kuten $\frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, joten valitaan tämä vertailufunktioksi (jolle vastaava integraali hajaantuu). Laskemalla raja-arvo

$$\frac{x\sqrt{x}}{x^2-1} : \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{x^2-1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

nähdään, että alkuperäinen integraali hajaantuu.

9. Suppeneeko integraali

$$\int_3^\infty \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}} dx ?$$

Jos suppenee, yritä selvittää sen arvo.

Vastaus: Suurilla x :n arvoilla integrandi käyttäytyy kuten $\frac{1}{(2x)^{\frac{2}{3}}}$, joten vertailufunktioksi voidaan valita esimerkiksi $\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$, jolle integraali hajaantuu.

$$\frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}} : \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

joten myös alkuperäinen integraali hajaantuu.

10. Suppeneeko integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx ?$$

Jos suppenee, yritä selvittää sen arvo.

Vastaus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Ensimmäinen integraali tarkoittaa raja-arvoa

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left/ \arctan x \right|_{-M}^0 = \lim_{M \rightarrow \infty} (-\arctan(-M)) = \frac{\pi}{2},$$

mikä osoittaa, että ensimmäinen integraali suppenee ja sen arvo on $\frac{\pi}{2}$. Samalla tavoin voidaan laskea toisen integraalin arvoksi $\frac{\pi}{2}$, joten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

11. Suppeneeko integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx ?$$

Vastaus: Integraali on epäoleellinen sekä ylä- että alarajan vuoksi joten sitä tulee tarkastella kahtena osana:

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx$$

Ensimmäisen integraalin integrandi muistuttaa nollan lähistöllä funktiota $\frac{1}{x}$, jolle integraali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx$$

hajaantuu. Koska

$$\frac{1}{x\sqrt{1-x}} : \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1,$$

merkitsee tämä että integraali $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx$ hajaantuu myös. Täten tehtävän integraali hajaantuu.

12. Suppenevatko seuraavat integraalit?

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} dx \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x+1} dx.$$

Vastaus: a) Integraali on epäoleellinen sekä ylä- että alarajan vuoksi ja tällöin tulee tarkastella erikseen osia

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} dx.$$

Ensimmäisen integraalin integrandi muistuttaa pisteen 0 lähellä funktiota $\frac{1}{\sqrt{x}}$, jolle integraali suppenee. Raja-arvon

$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1 + x^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1$$

perusteella myös ensimmäinen integraali suppenee.

Suurilla x :n arvoilla taas integrandi muistuttaa funktiota $\frac{1}{x^2}$, jolle integraali suppenee. Raja-arvon

$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2} : \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2 + \sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

perusteella myös toinen integraali suppenee. Molempien yhtäaikainen suppeneminen merkitsee sitä, että tehtävän integraali suppenee.

b) Integraali on epäoleellinen sekä ylä- että alarajan vuoksi (termi $e^{\frac{1}{x}}$ kasvaa rajatta x :n lähestyessä nollaa). Tarkastellaan ensin integraalia

$$\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x + 1} dx$$

ja koska $e^{\frac{1}{x}}$ kasvaa yli kaikkien rajojen kun $x \rightarrow 0+$, voidaan todeta, että $e^{\frac{1}{x}} - 1 > 1$, kun x on riittävän lähellä nollaa. Valitaan siis vertailufunktioksi $\frac{1}{x}$ (jolle integraali hajaantuu) ja todetaan, että

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x + 1} : \frac{1}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{1 - \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} \infty.$$

Täten siis $\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x + 1}$ on lähellä nollaa suurempi kuin $\frac{1}{x}$, joten alkuperäinenkin integraali hajaantuu.

13. Esitä integraali

$$\int_0^\infty x^4 e^{-5x} dx$$

Γ -funktion arvona sopivan sijoituksen kautta ja laske integraalin arvo.

Vastaus: Sijoitetaan $t = 5x$ jolloin integrointirajat pysyvät ennallaan ja integraali muuttuu muotoon

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^4 3e^{-5x} dx &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{5}\right)^4 e^{-t} \frac{1}{5} dt = \frac{1}{3125} \int_0^\infty t^{5-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{3125} \cdot \Gamma(5) = \frac{24}{3125}. \end{aligned}$$

14. Esitä integraali

$$\int_0^1 x \sqrt{|\ln x|} dx$$

Γ -funktion arvona sijoituksen $x = e^{-t}$ kautta ja laske integraalin arvo.

Vastaus: Sijoitettaessa $x = e^{-t}$ on $t = -\ln x$ ja integraali saa muodon

$$\int_0^1 x \sqrt{|\ln x|} dx = \int_\infty^0 e^{-t} \sqrt{t} (-e^{-t}) dt = \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-2t} dt.$$

Sijoittamalla tähän edelleen $t = \frac{u}{2}$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sqrt{t} e^{-2t} dt &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{u}{2}} e^{-u} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$