

Mika Hirvensalo

Insinöörimatematiikka 1 2020

Sisällys

1	Johdanto	5
1.1	Matematiikasta ja sen opiskelusta	5
1.2	Matematiikan perusteista	6
1.3	Päätelyn muotoja	8
1.4	Kreikkalaiset aakkoset	9
1.5	Logiikan merkintöjä	9
1.6	Joukko-opin peruskäsitteet	10
1.7	Tärkeimmät lukujoukot	12
1.8	Summa- ja tulomerkinnät	12
1.9	Binomikaava	14
2	Reaalilukujen perusominaisuudet	17
2.1	Rationaalilukujen epätäydellisyys	17
2.2	Reaalilukujen aksiomatiikka	19
2.3	Aksiomatiikan seurauksia	22
3	Yleisimmät reaalifunktiot	25
3.1	Terminologiaa	25
3.2	Polynomi- ja rationaalifunktiot	26
3.3	Eksponenttifunktiot	27
3.4	Logaritmifunktiot	29
3.5	Trigonometriset funktiot	31
3.6	Trigonometristen funktioiden ominaisuuksia	33
3.7	Reaalifunktioiden esitystapoja	33
4	Raja-arvo ja jatkuvuus	35
4.1	Differentiaali- ja integraalilaskennan kehityksestä	35
4.2	Raja-arvo	36
4.3	Jatkuvuus	42
5	Derivaatta	45
5.1	Derivaatan määritelmä	45
5.2	Derivointisääntöjä	48
5.3	Parametrimuodossa olevan ja implisiittifunktion derivointi	51
5.4	Useampikertaiset derivaatat	52
5.5	Antiderivaatta ja sen määrittäminen	52
5.6	Rationaalifunktion antiderivaatta	55
6	Differentiaalilaskennan sovelluksia	57
6.1	Differentiaalilaskennan väliarvolause	57
6.2	l'Hospitalin sääntö	59
6.3	Käyrän tangentti	60
6.4	Funktion kulun tutkiminen	61
6.5	Optimointitehtävät	61
6.6	Muutoksen arviointi	62

6.7	Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt	63
6.8	Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike	63
6.9	Yhtälön likimääräinen ratkaiseminen	64
7	Taylorin polynomit	69
7.1	Korkeamman asteen approksimaatiot	69
7.2	Ordo-merkintä	72
7.3	Raja-arvojen määrittäminen	74
8	Integraalit	75
8.1	Riemann-integraali Darboux'n tavalla	76
8.2	Funktoiden integroituvuus	79
8.3	Integraalien perusominaisuuksia	80
8.4	Analyysin peruslause	82
8.5	Integraalin arvon määrittäminen	84
9	Integraalin sovelluksia	89
9.1	Pinta-ala	89
9.2	Kaarenpituus: Parametrimuoto	90
9.3	Kaarenpituus: xy -muoto	90
9.4	Tilavuus	91
10	Integraalikäsitteen laajennuksia	93
10.1	I lajin epäoleellinen integraali	93
10.2	II lajin epäoleellinen integraali	97
10.3	Yleinen epäoleellinen integraali	99
10.4	Integraalin määrittelemistä funktioista	101

Luku 1

Johdanto

Opintokokonaisuuden Insinöörimatematiikka 1, 2, 3 ja 4 tarkoitus on esittää perustiedot valikoiduista matematiikan työkaluista, joita sovelletaan teknisillä aloilla. Osassa 1 käsitellään lukiomatematiikan jatkumona differentiaali- ja integraalilaskentaa. Osassa 2 laajennetaan tietämystä matematiikan perusteista esittelemällä logiikkaa, matemaattista päättelyä, joukko-oppia, funktioiden peruskäsitteitä, kompleksilukujen perusteita ja lineaarialgebraa. Näistä lähtökohdista päästään kursseilla Insinöörimatematiikka 3 ja 4 käsittelemään käyttökelpoisimpien matemaattisten rakenteiden sovelluksia kuten Fourier-analyysiä, integraalimuunnoksia ja myös edellämainittujen menetelmien yhdistämistä lineaarialgebraan.

Pohjatiedoiksi kurssille Insinöörimatematiikka 1 tarvitaan käytännössä lukiokurssien laajan matematiikan tuntemus tai halukkuus opiskella vastaavat asiat itsenäisesti. Osallistujien otaksutaan hallitsevan ainakin alkeellisen joukko-opin, itseisarvon käsitteen, tavanomaiset polynomit, juurenoton, murtolausekkeet, potenssi- ja eksponenttimerkinnät, algebrallisten lausekkeiden käsittely- ja sievennyssäännöt, perusmenetelmiä yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemiseksi, trigonometristen ($\sin$, $\cos$, $\tan$), eksponentti- ja logaritmifunktioiden (e^x , $\ln x$) perusominaisuudet sillä tasolla kun niitä lukiomatematiikassa esitetään.

1.1 Matematiikasta ja sen opiskelusta

Encyclopædia Britannican mukaan matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede, joka on kehittynyt yksinkertaisesta lukumäärien laskemisesta, mittaamisesta ja muotojen kuvailusta.

Laskemisen taito on selvästi vanhempi kuin kirjoitustaito ja siksi matematiikan syntyä ei voida ajoittaa historian tutkimuksen keinoin. Varhaisin laskemiseen viittaava arkeologinen löydös on ajoitettu noin 35 000 vuoden taakse, mutta vanhimmat säilyneet kirjalliset dokumentit varsinaisen matematiikan harjoittamisesta ovat peräisin Egyptistä noin neljän vuosituhannen takaa. Ajanlaskumme alkua edeltävinä vuosisatoina matematiikka nousi kreikkalaisessa kulttuurissa kukoistukseen, jolle ei löytynyt vertaista ennen uuden ajan alkua. Thales, Eudoksos, Pythagoras, Eukleides, ja Arkhimedes ovat nimiä, jotka mainitun aikakauden muiden merkittävien filosofien ohella ovat pysyvästi kirjattuna matematiikan historiaan. Vasta 1600-luvulla alkanut ja nykypäiviin jatkuva matematiikan nousukausi Sir Isaac Newtonin ja Gottfried Leibnizin kehittämän differentiaalilaskennan myötä ylitti antiikin ajan kreikkalaisten saavutukset.

1800-luvun puolivälin jälkeen alkaneen kehityksen myötä matematiikka on jakautunut kymmeneen, jopa satoihin osa-alueisiin, ja ensikatsomalta saattaa näyttää, että joillakin alueilla on varsin vähän tekemistä toistensa kanssa. Syvällisempi perehtyminen kuitenkin paljastaa, että eri osa-alueita yhdistävät useat rakenteelliset piirteet.

Laajojen matematiikan kokonaisuuksien omaksuminen yleensä helpottuu, mikäli pelkkien laskumenetelmien lisäksi perehdytään myös perusteisiin. Insinöörimatematiikan opintokokonaisuus poikkeaa lukiomatematiikan kursseista luultavasti eniten siinä, että tällä kurssikokonaisuudella perehdytään matematiikan rakenteisiin lukiokursseja syvällisemmin. Kurssin ensimmäinen mieleenpainettava asia onkin seuraava: **ainoa keino matematiikan kunnolliseen osaamiseen kulkee perusteiden ja käsitteiden hyvän hallinnan kautta.**

Tämän kurssin opinnot jakautuvat luentoihin ja harjoitustehtäviin. Yleisesti hyväksi koetun käytännön mukaan harjoitustehtävien yhteydessä kannattaa varmistaa, että ratkaisun perustelut tulivat ymmärretyksi. Matematiikan opinnoissa pidetään yleensä oikeita perusteluja tärkeämpinä kuin virheetöntä ratkaisua, sillä oikeiden perustelujen myötä saatu virheellinen ratkaisu johtuu usein helposti korjattavissa olevasta erehdyksestä. Sen sijaan virheelliset perustelut voivat johtaa oikeaan ratkaisuun vain sattumalta.

1.2 Matematiikan perusteista

Matematiikka eroaa luonnontieteistä (esim. fysiikka, kemia, biologia) ja yhteiskuntatieteistä (esim. sosiologia, taloustiede) oleellisesti siinä, että matematiikan väitteitä ei yleensä voida todentaa (*verifioida*) tai kumota (*falsifioida*) empiirisesti, siis havaintojen perusteella. Filosofian termin tämä voidaan ilmaista myös siten, että matematiikan käsitteitä ei kytketä reaali maailman olioihin operationaalisesti.

Historiallisesta näkökulmasta katsoen on huomautettava että matemaattiset teoriat tosin varsin usein muodostetaan jonkin konkreettisen tarpeen mukaan. Tällöin myös peruskäsitteet, -ominaisuudet ja -suhteet yleensä syntyvät reaali maailman olioista abstraktion (jota suomeksi voitaneen kutsua rakenteiden ja niiden ominaisuuksien tiivistämiseksi tai pelkistämiseksi) kautta. Esimerkiksi lukumäärän käsite on tunnettu jo ihmiskunnan esihistoriassa, mutta *lukuja* yksi, kaksi, kolme, jne. ei sellaisenaan ole fysikaalisina olioina olemassa. Ne ovat ainoastaan ihmismielen abstrakteja eli tiivistettyjä kuvia reaali maailmassa esiintyvistä konkreettisista asiantiloista. Vaikka matemaattisten objektien kuten lukujen toivotaan kuvaavan hyvin reaali maailman käsitteitä (esim. lukumääriä ja niiden yhdistämistä lisäämällä, kertomalla tai vähentämällä), ei matematiikan luku- tai muidenkaan käsitteiden ominaisuuksia voida silti yleisesti perustella havaintojen pohjalta. Havainnot voivat kyllä tukea ja joissain tapauksissa myös kumota matemaattisen väittämän, mutta tyypillisin ongelma nousee siitä tosiseikasta, että matemaattiset teoriat pyrkivät yleensä puhumaan *äärettömästä* määrästä tapauksia, kun taas havainnot voivat kattaa vain äärellisen määrän.

Esimerkki 1. Lukujen liitännäislaki eli *assosiatiivisuus* tarkoittaa sitä, että

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (1.1)$$

olivatpa a , b ja c mitä hyvänsä lukuja. Kun $+$ ymmärretään tavallisena yhteenlaskuna, on hyvin ymmärrettävää, että assosiatiivisuus pätee kaikille reaali maailman lukumäärille. Sen sijaan assosiatiivisuus *matemaattisena* väittämänä ei ole itsestään selvä, sillä luvut a , b , ja c pitää ymmärtää reaali maailmasta riippumattomiksi olioiksi. Sama pätee abstraktien olioiden a , b ja c yhteenlaskulle: sen matemaattinen muoto ei ole konkreettista lukumäärien yhdistämistä, koska matemaattisessa teoriassa a , b ja c ovat vain lukumäärien ideaalisia vastineita, eivätkä lukumääriä. Tämän vuoksi liitännäislakia (1.1) ei voida matemaattista teoriaa muodostettaessa pitää itsestään selvänä, vaan se pitää kirjata teorian perusominaisuudeksi, *aksioomaksi*. Vaihtoehtoisesti perusominaisuudeksi voidaan kirjata jokin muu, josta (1.1) loogisesti seuraa.

Matemaattisessa teoriassa tärkeämpää kuin itse oliot ovat aina niiden väliset *suhteet ja operaatiot*. Juuri tämän vuoksi matematiikan sanotaan olevan *suhteen, rakenteen ja järjestyksen* tiede. Käsiteltävien perusolioiden *ontologialla* eli olemassaolon luonteella ei ole merkitystä, vaan ainoastaan sillä, miten matemaattiset objektit toisiinsa suhtautuvat. Esimerkiksi luonnollisten lukujen teorian ymmärtämisen kannalta ei ole tärkeää saavuttaa ymmärtämystä luonnollisten lukujen olemuksesta, siis siitä *mitä* objektit 1, 2, 3, ... ovat, vaan siitä, mitkä ovat niiden väliset operaatiot ja suhteet. Tietysti perusolioista määritelmien kautta rakennettavien olioiden luonteella on merkitystä, mutta vain määritelmän ymmärtämisen kannalta. Esimerkiksi *matriisi* määritellään tietyn tyyppisen reaali lukukaavion, ja tällöin tulee ymmärtää mitä reaali lukujen sijoittuminen kaavioon merkitsee matriisioperaatioiden kannalta. Tämä voidaan ilmaista myös siten, että matemaattisen käsitteen *matriisi* ontologia rakennetaan jo olemassa olevien matemaattisten käsitteiden päälle.

Kaikki matemaattiset teoriat voidaan esittää *aksiomaattis-deduktiivisessa* muodossa, jossa teorian perusolioiden ja -suhteiden olemassaolo esitetään määritelminä tai *aksiomina* eli perusväittämänä. Muut teorian väittämät eli *lauseet* eli *teoreemat* johdetaan loogisesti eli *dedusoidaan* aksiomista tai jo aiemmin dedusoiduista väittämistä. Matemaattinen *teoria* tarkoittaa niiden lauseiden joukkoa, jotka voidaan aksiomista johtaa.

Esimerkki 2. Luonnollisten lukujen teoriassa voidaan peruskäsitteiksi valita luvut 1, 2, 3, ... ja niiden yhteenlasku $+$. Yhdeksi teorian aksiomaksi voidaan valita liitännäislaki (1.1). Yleensä näin ei kuitenkaan tehdä, vaan luonnollisten lukujen teoria perustetaan vielä alkeellisempiin käsitteisiin. Nämä esitetään esimerkissä 3.

Matemaattisen teorian kannalta on tärkeää, että teorian peruskäsitteet ja aksiomat olisivat mahdollisimman yksinkertaiset, sillä abstraktista olemuksesta huolimatta matemaattisen teorian toivotaan yleensä kuvaavan mahdollisimman hyvin jotain fyysiseen maailmaan liittyvää asiaa. Jos teorian peruskäsitteet ja aksiomat ovat mahdollisimman harvalukuiset ja yksinkertaiset, on helpompaa varmistua siitä, että ne kuvaavat tarkasti toivottuja fysikaalisen maailman olioita.

Toinen syy aksiomajärjestelmien yksinkertaisuuspyrkimykseen on seuraava: osoittautuu, että jos teorian aksiomat ovat *ristiriitaiset*, voidaan niistä loogisesti johtaa mitä hyvänsä. Erityisesti voidaan johtaa mikä hyvänsä väitelause ja sen kielto. Teoriaa ei siis voida pitää hyväksyttävänä (tai edes mielenkiintoisena), jos sen aksiomat ovat keskenään ristiriitaiset.

Tämän vuoksi teorian aksiomien yksinkertaisuus on erittäin suotavaa: on uskottavaa, että ristiriitaisuudet näkyvät helpommin, mikäli aksiomat ovat yksinkertaisia. Ikävä kyllä tämä pitää paikkansa vain äärimmäisen yksinkertaisissa matemaattisissa teorioissa. Yleensä ristiriidattomuus on erittäin hankalasti (jos lainkaan) todennettavissa: 1900-luvun alkupuolella matematiikan ja logiikan perusteiden tutkimus on osoittanut, että lähes kaikkien mielenkiintoisten matemaattisten teorioiden aksiomajoukkojen ristiriidattomuutta ei voida teoriassa itsessään lainkaan todentaa. Ns. Gödelin toisen epätäydellisyyslauseen mukaan teorian ristiriidattomuutta ei teorian puitteissa voida todentaa, jos teoria on kyllin rikas puhuakseen luonnollisista luvuista.

Esimerkki 3 (Giuseppe Peanon aksiomatisointi luonnollisille luvuille). Luonnollisten lukujen teorian *peruskäsitteet* ovat joukko $\mathbb{N}$, luonnollinen luku $1 \in \mathbb{N}$ ja luonnollisen luvun n seuraaja $s(n)$. Teorian aksiomat ovat seuraavat:

1. Jos $n \neq m$, niin $s(n) \neq s(m)$ (kahdella eri luonnollisella luvulla on eri seuraaja).
2. Kaikille joukon $\mathbb{N}$ alkioille n pätee $s(n) \neq 1$ (ykkönen ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja).
3. Jos joukko A sisältää luvun 1 ja jokaisen sisältämänsä luvun seuraajan, niin silloin A sisältää kaikki luonnolliset luvut (*induktioaksioma*).

Näistä peruskäsitteistä ja aksiomista lähtien johdetaan kaikki luonnollisten lukujen ominaisuudet. Esimerkiksi yhteenlaskun määrittely voidaan aloittaa määrittelemällä $1 + n = n + 1 = s(n)$ ja laajentaa tästä koskemaan kaikkia summia $n + m$. Samoin käsitteet *suurempi kuin* ja *pienempi kuin* voidaan määritellä käyttäen pelkästään mainittuja peruskäsitteitä.

Vaikka Peanon aksiomat ovat yksinkertaiset, ei niiden ristiriidattomuutta voida todentaa perinteisen matematiikan puitteissa. Ristiriidattomuus voidaan todistaa pidemmälle viedyn matematiikan avulla, mikäli tiettyjen äärettömien objektien ominaisuuksista oletetaan riittäviä säännönmukaisuuksia.

Luonnollisten lukujen teoriaa voidaan laajentaa kokonaislukujen teoriaksi uusia käsitteitä määrittelemällä. Samoin voidaan kokonaislukuista päästä rationaalilukuihin ja edelleen reaalin lukuihin. Toisaalta määritelmät voivat olla varsin monimutkaisia, ja siksi yleensä on perusteltua aksiomatisoida reaalin luvut erikseen.

1.3 Päättelyn muotoja

Aiemmassa luvussa manittiin, että matemaattiset teoriat muodostetaan aksioomista ja peruskäsitteistä lähtien rakentamalla näiden päälle uusia käsitteitä ja loogisesti johtamalla aksioomista muita väitteitä (lauseita). Tässä luvussa tarkastellaan lyhyesti matematiikassa käytettävän päättelyn luonnetta.

Päättelyn eri muodoista voidaan mainita ainakin *deduktiivinen*, *induktiivinen* ja *abduktiivinen* päättely. Deduktiivisessa päättelyssä oletuksista johdetaan *päättelysääntöjä* käyttämällä johtopäätöksiä. Induktiivisessa päättelyssä johdetaan joukosta tapauksia yleinen sääntö, ja abduktiossa taas tyypillisesti tunnetuista säännönmukaisuuksista ja seurauksesta päätellään *mitä on tapahtunut*.

Induktiivinen päättely on tyypillistä luonnontieteille, osalle yhteiskuntatieteistä ja lääketieteelle. Induktiossa päätellään, että sääntö, joka toimii havaittujen tapausten yhteydessä, pätee myös yleisesti ("kaikki joutsenet jotka olemme nähneet ovat valkoisia, siis *kaikki* joutsenet ovat valkoisia"). Induktiivinen päättely ei ole loogisesti sitovaa (Australiassa on mustia joutsenia; *Cygnus atratus*), mutta induktiivisen päättelyn epävarmuutta voidaan toisinaan arvioida tilastollisin menetelmin. Erityisen tärkeää induktion epävarmuuden arviointi on lääketieteessä: halutaan, että johtopäätös "lääkkeellä ei ole haittavaikutuksia" pitää paikkansa mahdollisimman suurella todennäköisyydellä, vaikka lääkettä on voitu testata vain rajalliseen ihmisjoukkoon.

Abduktiivinen päättely on tunnettua erityisesti salapoliisitarinoista: "Herra X:n nähtiin poistuvan murhapaikalta, kenenkään muun ei nähty poistuvan murhapaikalta, siis herra X on murhaaja". Abduktiivista päättelyä käytetään jossakin määrin yhteiskuntatieteissä ja humanistisissa tieteissä, mutta induktion tavoin abduktiivinen päättely ei ole loogisesti sitovaa. Looginen sitovuus tarkoittaa sitä, että premissien (oletusten) ollessa tosia ovat johtopäätökset myös tosia.

Matemaattisten väittämien (lauseiden) todistamiseen käytetään ainoastaan loogisesti sitovaa, deduktiivista päättelyä. Tämänlainen päättely voidaan periaatteessa formalisoida käyttämällä *predikaattilogiikkaa* ja esittelemällä äärellinen määrä päättelysääntöjä, joista voidaan jokaisesta todeta, että oletusten ollessa tosia on myös johtopäätös tosi. Tällaisen formalismin esittely veisi kuitenkin liiaksi ajallisia resursseja eikä sellaista siksi tällä kurssilla esitetä.

Esimerkki 4. Modus ponens on tyypillinen deduktiivisen päättelyn sääntö. Se voidaan esittää kaaviomuodossa

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi},$$

joka tulkitaan siten, että logiikan kaavoista ϕ ja $\phi \rightarrow \psi$ (oletukset eli premissit) voidaan päätellä johtopäätös ψ .

Tämän osan lopuksi tarkastellaan lyhyesti matemaattisen teorian väitteiden *totuusarvoa*. Aksioomais-deduktiivisessa teoriassa teoriaa koskevat väittämät eli lauseet johdetaan loogisesti aksioomista, joten lauseiden totuus palautuu tällöin aksioomien totuuteen ja loogisten päättelysääntöjen pätevyyyteen.

Päättelysääntöjen pätevydestä puhutaan enemmän seuraavassa luvussa, mutta jo tässä yhteydessä voidaan todeta, että *yleensä aksioomien totuusarvo on matemaattisen teorian kehittämisen kannalta täysin yhdentekevä seikka* ja matemaattisen teorian lausetta sanotaan todeksi, mikäli se on johdettavissa aksioomista.

On kuitenkin jälleen muistutettava, että matemaattisen teorian aksioomia ei yleensä valita mielivaltaisesti, vaan niiden toivotaan kuvaavan mahdollisimman hyvin teorian objektien ominaisuuksia. Jos esimerkiksi halutaan teorian kuvaavan luonnollisia lukuja, on syytä valita aksioomat siten, että ne eivät ainakaan ole ristiriidassa luonnollisia lukuja koskevan intuition kanssa.

Totuuden käsitteen kannalta matemaattista teoriaa voidaan verrata vaikkapa shakkipeliin: pelin alkuasetelma vastaa aksioomajoukkoa ja sääntöjen mukaiset siirrot päteviä päättelysääntöjä. Kukin säännönmukaisilla siirroilla saatu asetelma vastaa matemaattisen teorian lausetta ja tällöin matemaattisen teorian yhteydessä usein esiintyvä kysymys "onko tämä lause tosi?" vastaa shakkipelissä kysymystä "voidaanko tällainen asetelma saada pelisääntöjä noudattamalla?"

Shakkipelissä ei oteta kantaa siihen kysymykseen, onko pelin alkuasetelma jollakin tavalla "tosi", ja sama pätee myös matemaattiseen teoriaan. Oleellista on se, mitä aksioomista voidaan loogisesti johtaa.

*Esimerkki 5. Syllogismi on deduktion muoto, jossa kahdesta premissistä (suomeksi lähtökoh-
ta) (pääpremissi ja alipremissi) päätellään johtopäätös.*

Jokainen ihminen on kuolevainen (pääpremissi)	Sokrates on ihminen (alipremissi)
Sokrates on kuolevainen (johtopäätös)	

Harjoitustehtävä: Mitä voidaan ylläolevasta syllogismista sanoa a) jos pääpremissi poistetaan
b) jos johtopäätös ei ole tosi?

Taustatietoa



Aristoteles (*Ἀριστοτέλης*, 384 eKr–322 eKr) oli kreikkalainen filosofi, jonka katsotaan Sokrateen ja Platonin ohella vaikuttaneen eniten länsimaiseen ajatteluun. Aristoteles käsitteli lähes kaikkea inhimillisen toiminnan piiriin kuuluvaa, luonnontieteistä valtiotieteisiin ja taiteisiin. Aristoteles analysoi loogista päättelyä ja kehitti syllogistisen logiikan. Aristotelesta sanotaan usein logiikan isäksi.

(kuva: Wikimedia Commons)

1.4 Kreikkalaiset aakkoset

Matematiikan lisäksi useilla luonnontieteen aloilla käytetään kreikkalaisia aakkosia, jotka on siis syytä opetella. Joistakin pienistä kirjaimista käytetään kahta eri muotoa.

alfa	$A \alpha$	iota	$I \iota$	rhoo	$P \rho$
beta	$B \beta$	kappa	$K \kappa, \chi$	sigma	$\Sigma \sigma, \varsigma$
gamma	$\Gamma \gamma$	lambda	$\Lambda \lambda$	tau	$T \tau$
delta	$\Delta \delta$	myy	$M \mu$	ypsilon	$\Upsilon \upsilon$
epsilon	$E \varepsilon$	nyy	$N \nu$	fii	$\Phi \phi, \varphi$
zeeta	$Z \zeta$	ksii	$\Xi \xi$	khii	$X \chi$
eeta	$H \eta$	omikron	$O o$	psii	$\Psi \psi$
theeta	$\Theta \theta, \vartheta$	pii	$\Pi \pi, \varpi$	oomega	$\Omega \omega$

1.5 Logiikan merkintöjä

Yleisimmät logiikan merkinnät ovat *konnektiivit*

- $\wedge$ (konjunktio eli looginen ja)
- $\vee$ (disjunktio eli looginen tai)
- $\neg$ (negaatio eli looginen ei)
- $\rightarrow$ (implikaatio eli looginen seuraus)

sekä *kvanttorit*

- $\forall$ (universaalikvanttori)
- $\exists$ (eksistentiaalikvanttori)

Nämä merkinnät käsitetään tässä kurssissa intuitiivisesti. Jos siis P ja Q ovat väitelauseita, merkitsee esimerkiksi $P \wedge Q$ yhdistettyä väitelausetta ” P ja Q ”, kun taas $\neg P$ tarkoittaa P :lle vastakkaista väitettä. $P \rightarrow Q$ voidaan lukea ”jos P niin Q ”.

Kvanttorit tulkitaan siten, että $(\forall x)P(x)$ tarkoittaa ”kaikille x :ille pätee $P(x)$ ” ja $(\exists x)P(x)$ ”on olemassa x jolle pätee $P(x)$ ”. On huomattava, että merkintää $\Rightarrow$ käytetään osoittamaan loogista seurausta aivan kuten konnektiivia $\rightarrow$, mutta tällä kurssilla $\rightarrow$ on varattu muodollisten loogisten väittämien yhdistämiseen, kun taas merkintää $\Rightarrow$ käytetään osana matemaattisesti varustettua suomen kieltä.

Esimerkki 6.

$$a = b \Rightarrow a + 1 = b + 1$$

on suomen kielen lause, jossa kerrotaan että ehdosta $a = b$ seuraa ehto $a + 1 = b + 1$. Sen sijaan $a + b \rightarrow a + 1 = b + 1$ on logiikan kaava, johon ei välttämättä katsota sisältyvän luonnollisen kielen elementtejä.

1.6 Joukko-opin peruskäsitteet

Käsite *joukko* on yksi matematiikan tärkeimmistä. Matemaattisia teorioita esitettäessä predikaattilogiikan avulla tulee aina valita tarvittavat predikaatti- ja funktiosymbolit, joilla teorian objekteista voidaan puhua. Osoittautuu, että lähestulkoon kaikki matematiikka voidaan rakentaa joukko-opin varaan, jolloin siis periaatteessa riittää esittää joukko-oppi aksiomatisoituna teoriana ja sopia, että muut matemaattiset käsitteet ovat lyhennysmerkintöjä joukko-opin merkinnöistä.

Äärellisen tai numeroituvan äärettömän joukon merkitsemiseen käytetään aaltosulkeita: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ tai $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Joukkoon kuulumisesta käytetään merkintää $\in$ ja päinvastaisesta merkintää $\notin$. Esimerkiksi $2 \in A$, mutta $2 \notin B$. *Tyhjistä joukosta*, johon ei kuulu yhtään alkioa, käytetään merkintää $\emptyset$. Tätä merkintää ei tule sekoittaa kreikkalaisen aakkoston ϕ -kirjaimeen. Tavallisimmat joukkojen väliset operaatiot ovat

- Unioni eli yhdiste. Esimerkiksi $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Intersektio eli leikkaus. Esimerkiksi $A \cap B = \{3\}$
- Differenssi eli erotus. Esimerkiksi $A \setminus B = \{1, 2\}$.

Tämän kurssin tavoitteiden kannalta ei ole mielekästä esittää aksiomaattista perustaa joukko-opille, joten tyydytään sen sijaan intuitiiviseen käsitykseen.

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Joukon merkinnässä alkioiden järjestyksellä ei ole väliä. Täten siis $\{2, 3, 1\}$ on sama joukko kuin $\{1, 2, 3\}$. Joukko ei myöskään sisällä samaa alkioa kahteen kertaan, joten on sovittu, että esimerkiksi myös merkintä $\{1, 1, 2, 3\}$ tarkoittaa joukkoa $\{1, 2, 3\}$.

Joskus myös ääretön joukko määritellään ”esittelemällä” sen alkiot. Näin voidaan tehdä, mikäli on olemassa jokin *induktiivinen sääntö*, joka määrittää kaikki alkiot.

Esimerkki 7. Luonnollisilla luvuilla tarkoitetaan joukkoa $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Käsitteen joukko kuvailussa on oleellista, että voidaan aina määrittää kuuluuko jokin alkio joukkoon vai ei. Tähän liittyvät matemaattiset merkinnät esitellään seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 1. $\in$ on ns. kaksipaikkainen relaatiosymboli. Merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A . Merkintä $x \notin A$ on lyhennys merkinnästä $\neg(x \in A)$ ja siis tarkoittaa, että alkio x ei kuulu joukkoon A .

Määritelmä 2. Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkiot x , jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$.

Esimerkki 8. $B = \{x \in A \mid x \leq 2\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää joukkoon A kuuluvat alkio x , jotka ovat suuruudeltaan korkeintaan 2. Jos esimerkiksi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ on $B = \{1, 2\}$.

Joukko-opin tärkein anti matematiikalle on mahdollisuus laskea käsitteet yksinkertaiselle pohjal-
le. Yleensä matemaattisen teorian esittämisessä käytetään funktio- ja relaatiotymboleja, mutta periaatteessa lähes kaikki matematiikka on mahdollista rakentaa käyttämällä vain yhtä relaatiota ($\in$) ja sopimalla pidemmälle menevät määritelmät lyhennysmerkinnöiksi.

Edellä kuvailtua joukko-oppia kutsutaan *naaiiviksi joukko-opiksi*, sillä joukkoja ei määritellä eksaktilla tavalla ja sisältymisrelaatio $\in$ käsitetään intuitiivisesti. 1800-luvun loppupuolella havaittiin, että naaiivi joukko-oppi voi johtaa loogisiin ongelmiin, erityisesti mikäli joukkoon kuulumisen ehto merkinnässä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ on rajoittamaton.

Tämän vuoksi saksalainen matemaatikko Gottlob Frege (1848–1925) joutui kohtaamaan henkilökohtaiseksi tragediaksi luonnehdittavan vastoinikäymisen laatiessaan järkälemäistä teostaan *Grundgesetze der Arithmetik* (Aritmetiikan perusteet), osa 1 (1893), osa 2 (1903). Frege pyrki teoksessaan osoittamaan, että kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin, mutta oli sallinut joukkoon kuulumisehdon ilman rajoituksia. Tuolloin nuori brittiläinen matemaatikko ja loogikko Bertrand Russell (1872–1970) huomautti Fregelle, että hänen käsitteistönsä sisältää ristiriidan: Kun määritellään joukko

$$A = \{X \mid X \notin X\},$$

siis A on niiden joukkojen joukko, jotka *eivät kuulu itseensä*, voidaan tehdä seuraava johtopäätös: $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$. Tämä ristiriita tunnetaan nimellä *Russelin paradoksi* ja siitä on esitetty sittemmin lukuisia variantteja. Frege ehti lisätä painossa olevaan osaan 2 lisäsivut, jossa hän käsitteli Russelin havaintoa tragediana joka romahdutti hänen elämäntyönsä ennen kuin se ehdittiin edes kokonaisuudessaan julkaista.

Melko pian Russelin paradoksin jälkeen myös joukko-opille laadittiin aksiomaattinen lähestymistapa, joka nykyisin tunnetaan nimellä Zermelon –Fraenkelin -joukko-oppi. Tästä aksiomatisoidusta versiosta ei toistaiseksi ole löydetty ristiriitoja.

Esimerkki 9. Huomioi että tyhjä joukko $\emptyset$ on eri asia, kuin joukko $\{\emptyset\}$, jonka ainoa *alkio* on tyhjä joukko. Edelleen eri käsite on joukko $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, joka sisältää kaksi edellistä joukkoa. Näistä esitetyistä joukoista voidaan rakentaa yhä uusia muodostamalla joukko, jonka jäseninä ovat kaikki entiset joukot. Listan seuraava jäsen on täten $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ ja yleinen sääntö on seuraava: $N_0 = \emptyset$, $N_i = N_{i-1} \cup \{N_{i-1}\}$.

Jos joukko-opille on luotu kestävä perusta, on sen nojalla yllämainittujen joukkojen olemassaolo ja uusien muodostaminen edellämainitulla tavalla ongelmattonta. Tällöin voidaan sopia, että joukosta $\emptyset$ käytetään merkintää 0, joukosta $\{\emptyset\}$ merkintää 1, joukosta $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ merkintää 2 jne. Tällä tavoin on mahdollista esittää luonnolliset luvut pelkästään joukko-opin käsitteiden avulla.

Lähes kaikki matemaattiset kaavat, lauseet ja todistukset voidaan kirjoittaa ja niiden merkitys voidaan periaatteessa ymmärtää ainoastaan joukko-opin merkintöjä käyttäen. Monet oleelliset käsitteet kuten funktio *määritellään* joukkojen avulla ja kurssilla Insinöörimatematiikka 2 nähdään miten tämä tapahtuu.

Voidaan oikeutetusti kysyä miksi sitten joukot ja joukko-oppi eivät näytä olevan erityisen tärkeitä matematiikan opiskelussa eivätkä edes kovinkaan usein matemaatikkojen työskentelyssä. Vastaus on varsin yksinkertainen: pelkästään joukko-opin merkintöjä ja käsitteitä käyttäen kaavoista, todistuksista ja käsitteistä tulisi varsin pitkiä ja työläitä ymmärtää, minkä vuoksi tarvitaan selkeämpiä merkintöjä ja käsitteitä.

Samankaltainen ilmiö nähdään myös ohjelmoinnissa: nykyisin enää aniharva ohjelmoi konekielillä (assembly), koska korkeamman tason ohjelmointikielillä työ on selkeämpää ja usein tarkoituksenmukaisempaa. Kuitenkin korkean tason ohjelmointikielten toiminta voidaan selittää konekielen avulla. Matematiikassa voidaan joukko-opin käsitteiden ajatella vastaavan konekieltä ja tavallisesti esiintyvien käsitteiden vastaavan korkean tason ohjelmointikieltä. Joukko-opin peruskäsitteet kuitenkin esiintyvät matematiikan merkinnöissä useasti, minkä vuoksi niihin pitää perehtyä.

1.7 Tärkeimmät lukujoukot

Joukko on käsitteenä tarkoin määritelty, kun sen alkioit tunnetaan. Tällöin ei siis ole tarpeen perehtyä alkioiden sisäiseen rakenteeseen tai olemukseen, ei siis tarvitse tietää minkälaisia ”olioita” joukon alkioit ovat, riittää tietää sisältyykö jokin alkio joukkoon vai ei.

Perinteisesti matematiikassa *lukujoukot* ovat olleet erityisasemassa jo historiallisista syistä. Tämän kurssin kannalta tärkeimmät lukujoukot luetellaan seuraavassa määritelmässä.

Määritelmä 3.

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- Reaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, ja
- Kompleksilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{C}$.

Tällä kurssilla pidetään joukkoja $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}$ intuitiivisesti selvinä käsitteinä ja tarkastellaan pikeminkin lukujoukkoja $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$. Kompleksilukujen joukkoa $\mathbb{C}$ käsitellään seuraavassa insinöörimatematiikan kurssissa.

Määritelmien 2 ja 3 mukaan $\mathbb{Q}$ koostuu osamääristä $\frac{a}{b}$, joissa a ja b ovat kokonaislukuja, ja $b \neq 0$. Samaa osamäärää voidaan esittää monella tavalla: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$, mutta kuten aiemmin on mainittu, alkion useat mahdolliset esitykset eivät muuta joukkoa: $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}\} = \{\frac{1}{2}\}$. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ voidaan katsoa kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ laajennukseksi, sillä jokainen kokonaisluku a voidaan esittää osamääränä $a = \frac{a}{1}$.

Jokaisella reaaliluvulla on olemassa desimaaliesitys, joka useimmissa tapauksissa on päättymätön. Sanotaan, että desimaaliesitys on päättävä, jos kaikki desimaalit ovat nollija jostakin rajasta lähtien, jolloin voidaan tietenkin jättää loputon nollien jono merkitsemättä.

Esimerkki 10. Rationaaliluvulla $\frac{1}{3}$ on päättymätön desimaaliesitys $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, sen sijaan rationaaliluvulla $\frac{1}{5}$ on päättävä esitys $\frac{1}{5} = 0,2000\dots$, mikä yleensä merkitään $\frac{1}{5} = 0,2$.

Päättävä desimaaliesitys (toisin sanoen sellainen desimaaliesitys, jossa kaikki desimaalit ovat nollija jostakin kohdasta lähtien) voi olla vain rationaaliluvulla. Mikäli rationaaliluvun desimaaliesitys ei ole päättävä, se on jaksollinen. Toisaalta taas rationaaliluvun desimaaliesitys ei välttämättä ole yksikäsitteinen: Esimerkiksi kokonaisluvulla 1 on sekä päättävä desimaaliesitys $1,000\dots$ että päättymätön jaksollinen desimaaliesitys $0,999\dots$. Itse asiassa jokaista päättävää desimaaliesitystä kohti voidaan löytää samaa lukua esittävä päättymätön esitys samoin kuin esimerkiksi luvulle $0,5000\dots = 0,4999\dots$.

Tavanomaisia merkintöjä ovat myös seuraavat:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli, analogisesti $(a, b]$)
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ (suljettu puolisuora, analogisesti $(-\infty, a]$)
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (avoin puolisuora, analogisesti $(-\infty, a)$)

1.8 Summa- ja tulomerkinnät

Summa- ja tulomerkinnät Σ ja Π ja niiden käsittelysäännöt saavat lukiokursseissa yleensä vain vähän huomiota. Näitä merkintöjä käytetään kuitenkin hyvin yleisesti ja siksi niihin on syytä perehtyä.

Summa voidaan merkitä lyhyemmin

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

ja tulo

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i.$$

Tässä luvussa käsitellään jatkossa ainoastaan summamerkinnot, koska vastaavat käsitteellisyysäännöt voidaan saada helposti myös tulolle.

Summausindeksi i valinta ei ole tärkeä, yhtä hyvin yllä oleva summa voitaisiin kirjoittaa muodossa $\sum_{k=1}^n a_k$, tärkeää on ainoastaan, että summausindeksiä ei voi vahingossa sekoittaa johonkin toiseen lausekkeissa esiintyvään muuttujaan tai vakioon. Erityisesti kompleksilukujen yhteydessä (Insinöörimatematiikka 2) pitää karttaa i :n käyttöä indeksinä. Summamerkinnot ideana on, että summausindeksi juoksee läpi esiintyvien lukujen $a_1, \dots, a_n$ indeksöinnin luvusta 1 lukuun n , ja tämä ilmaistaan summamerkin $\sum$ ala- ja yläpuolella olevilla rajoitteilla ” $i = 1$ ” ja ” n ”.

Summamerkinnot käyttäen voidaan vaikkapa n :n ensimmäisen kokonaisluvun summa kirjoittaa lyhyempään muotoon:

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i.$$

On kuitenkin huomattava, että kyseessä on vain merkintätapa, eikä se anna mitään keinoa näyttää toteen, että

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

mikä kyllä pitää paikkansa. Tällä kurssilla esitetään menetelmiä, joilla yllä oleva yhtälö voidaan todistaa oikeaksi.

Summamerkinnot käsittelyyn liittyvät säännöt saadaan suoraan yleisistä summia koskevista säännöistä sekä summamerkinnot määrittelystä. Esimerkiksi tavanomainen osittelulain soveltaminen

$$c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n$$

voidaan summamerkinnot käyttäen kirjoittaa muotoon

$$c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i.$$

Samoin summattavien jäsentely

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$$

saa muodon

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i).$$

Edelleen, summamerkinnot voidaan aina ”katkaista”: jos $1 < m < n$, voidaan tietysti kirjoittaa

$$a_1 + \dots + a_n = a_1 + \dots + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n,$$

mikä voidaan edelleen lyhentää muotoon

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i.$$

Summausindeksin muutos on suora seuraus merkintätavasta:

$$\sum_{i=1}^n a_i, \quad \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}, \quad \text{ja} \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

tarkoittavat samaa asiaa. Yleisenä sääntönä pätee, että summausmerkinnän ylä- ja alarajaa voidaan nostaa yhdellä, jos summalausekkeessa esiintyvistä indeksistä vähennetään yksi. Samoin summausmerkinnän rajoja voidaan laskea yhdellä, jos summalausekkeen indeksiin lisätään ykkönen. Tarvittaessa summamerkinnot rajan nostoa tai laskua voidaan tietenkin soveltaa useamman kerran peräkkäin.

Jos merkinnässä $\sum_{i=m}^n$ on $n < m$, sovitaan, että kyse on tyhjästä summasta, jonka arvo on nolla. Vastaavasti tyhjän tulon arvoksi sovitaan 1.

1.9 Binomikaava

Tässä osassa esitettävää binomikaavaa varten määritellään ns. *binomikertoimet* ja tarkastellaan joitakin niiden ominaisuuksia. Johdantona binomikaavaan voidaan tarkastella binomin $a + b$ potensseja

$$(a+b)^1 = a+b, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad \text{jne.}$$

Edellisissä esimerkeissä $(a+b)^n$ on summalauseke, jossa esiintyvät termit $C_{n,i}a^{n-i}b^i$ ja jokaisessa termissä $C_{n,i}$ on jokin tietty kerroin. Newtonin binomikaava selvittää kertoimien $C_{n,i}$ muodon.

Määritelmä 4. Kertomafunktio ei-negatiivisille kokonaisluvuille määritellään seuraavasti: $0! = 1$ ja kun $n \geq 1$, on $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Kertomafunktiolla on ilmeinen kombinatorinen (yhdistelmäopillinen) tulkinta: $n!$ ilmaisee kuinka monta erilaista järjestettyä jonoa voidaan muodostaa luvuista $1, 2, \dots, n$.

Määritelmä 5. Olkoon $0 \leq n \leq m$. Binomikerroin $\binom{m}{n}$ määritellään

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Esimerkki 11.

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1, \quad \binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m, \\ \binom{m}{2} = \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Lause 1. Jos $1 \leq n \leq m-1$, niin $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$

Todistus. Tässä todistuksessa esiintyy ainoastaan yhtäsuuruuksia, jotka on perusteltavissa määritelmillä tai (reaali)lukujen perusominaisuuksilla:

$$\begin{aligned} & \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} \\ &= \frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} + \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-1-(n-1))!} \\ &= \frac{(m-1)!(m-n)}{n!(m-n)!} + \frac{(m-1)!n}{n!(m-n)!} \\ &= \frac{(m-1)!(m-n+n)}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}. \end{aligned}$$

Taustatietoa

Blaise Pascal (1623–1662) oli ranskalainen matemaatikko, fyysikko ja filosofi, jonka katsotaan perustaneen todennäköisyyslaskennan. Hän tutki myös projektiivista geometriaa. Pascalin mukaan on nimetty paineen yksikkö ja ohjelmointikieli.

(kuva: Wikimedia Commons)

Huomautus 1. Lauseen 1 mukaisesti binomikertoimet muodostavat ns. *Pascalin kolmion*, jonka kukin alkio askemalla yläoikealla ja ylävasemmalla olevat alkioit yhteen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array} = \begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array}$$

Binomikertoimen merkitys kombinatoriikassa on seuraava: $\binom{m}{n}$ ilmaisee niiden tapojen määrän, joilla m :n alkion joukosta voidaan valita n alkioita, kun valintajärjestykseen ei kiinnitetä huomiota. Tämä voidaan havaita oikeaksi seuraavasti: Olkoon $C(m, n)$ mainittu tapojen määrä. Koska valitut n alkioita voidaan järjestää jonoon $n!$ eri tavalla, on $n!C(m, n)$ niiden tapojen määrä, joilla voidaan m :n alkion joukosta valita n alkioita järjestys huomioon ottaen. Koska ensimmäinen alkio voidaan valita m :llä tavalla, toinen $m-1$:llä, jne., on tämä määrä $m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)$. Näin ollen

$$n!C(m, n) = m(m-1) \cdots (m-n+1),$$

mistä jakolaskulla ja määritelmiä soveltamalla saadaan

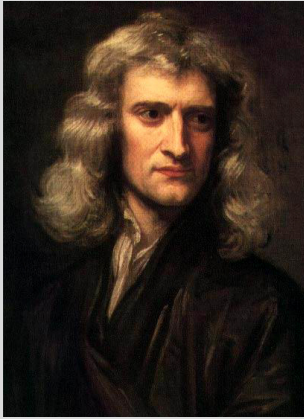
$$\begin{aligned}
 C(m, n) &= \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} \\
 &= \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1) \cdot (m-n)!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}.
 \end{aligned}$$

Esimerkki 12. Joukosta $\{1, 2, 3, \dots, 39\}$ voidaan valita 7 numeroa $\binom{39}{7} = \frac{39!}{7!32!} = 15380937$ eri tavalla.

Lause 2 (Newtonin binomikaava).

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

kun n on positiivinen kokonaisluku.

Taustatietoa

Sir Isaac Newton (1643–1728) oli englantilainen matemaatikko, fyysikko, filosofi ja alkemisti. Newton esitti mekaniikan perustavat liikelait sekä yleisen gravitaatiolain. Hän kehitti differentiaali- ja integraalilaskennan riippumatta Gottfried Leibnizin samanaikaisesta työstä. Newtonin katsotaan kuuluvan Gaussin ja Arkhimedeen ohella maailmanhistorian merkittävimpien matemaatikkojen joukkoon.

(kuva: Wikimedia Commons)

Luvun oleellisia asioita:

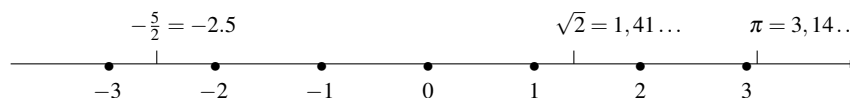
- Matematiikka ei ole luonnontiede
- Matematiikan perustana toimivat aksioomat, lauseita eli teorian väittämiä johdetaan päätelemällä.
- Deduktio on ainoa matematiikassa käytettävä päättelyn muoto.
- Logiikan merkinnät
- Newtonin binomikaava.

Luku 2

Reaalilukujen perusominaisuudet

Insinöörimatematiikan kurssikokonaisuuden kannalta keskeisimmät matematiikan osa-alueet ovat differentiaali- ja integraalilaskenta, ja niiden perustana toimii reaalilukujen teoria. Kuten kaikki matematiikka, myös reaalilukujen teoria on esitettävissä aksiomaattis-deduktiivisessa muodossa. Tässä luvussa esitellään reaalilukujen aksiomatiikka lyhyesti lähinnä siitä syystä, että täten voidaan vastata joihinkin perustavaa laatua oleviin kysymyksiin, kuten “mikä on luvalinen operaatio”?, Miksi negatiivinen kertaa negatiivinen on positiivinen”? ja “miksi epäyhtälömerkin suunta kääntyy kun kerrotaan negatiivisella luvulla”? Lisäksi löytynee vastauksia kysymyksiin, joita lukiokurssilla ei luultavasti ole edes esitetty. Tällä kurssikokonaisuudella ei kuitenkaan ole tarkoitus ryhtyä johtamaan reaalilukujen teoriaa aksiomista asti, sillä sellainen esitys veisi kohtuuttomasti aikaa ja muita resursseja.

Intuitio reaaliluvuista rakentuu sille pohjalle, että reaaliluvut $\mathbb{R}$ täydentävät rationaalilukujen joukkoa muodostamalla lukusuorasta yhtenäisen yksiulotteisen jatkumon (kuva 2.1). Kokonaisluvut muodostavat selvästi toisistaan eroteltavissa olevan, *diskreetin* joukon, mutta reaalilukujen ajatellaan täyttävän suoran aukottomasti siten että yhtä ideaalista geometrasta pistettä vastaisi tasan tarkkaan yksi reaaliluku. Tästä juontaa yleinen tapa kutsua reaalilukuja *pisteiksi*.



Kuva 2.1 Lukujen ajatellaan sijoittuvan lukusuoralle suuruusjärjestyksessä vasemmalta oikealle. Kokonaisluvut muodostavat tasavälisen pisteistön, kun taas rationaaliluvut levittäytyvät lukusuoralle tiheänä joukkona. Aukoton lukusuorasta tulee kuitenkin vasta, kun reaaliluvut tuodaan mukaan.

2.1 Rationaalilukujen epätäydellisyys

Palautetaan mieleen rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Samaistamalla murto-luvut $\frac{a}{1}$ kokonaisluvun a kanssa voidaan katsoa, että $\mathbb{Q}$ sisältää kaikki kokonaisluvut, mutta näiden lisäksi myös paljon muita lukuja. Kokonaislukujen graafisessa esityksessä lukusuoraan asetetaan pisteet ykkösen välein, mutta rationaalilukujen esitys on mutkikkaampi, sillä rationaaliluvut täyttävät lukusuoran tiheästi. Tämä voidaan nähdä siitä, että kahden rationaaliluvun $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ välissä on aina näiden keskiarvo

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}.$$

Tämän vuoksi ei ole olemassa esimerkiksi pienintä positiivista rationaalilukua, sillä rationaaliluvusta q päästään aina pienempään lukuun jakamalla $q = \frac{a}{b}$ kahtia: $0 < \frac{q}{2} < q$. Toisaalta taas olipa $q = \frac{a}{b}$ miten pieni positiivinen rationaaliluku hyvänsä, saadaan tästä kokonaisluvulla kertomalla miten suuri luku hyvänsä: $Nb \cdot q = Nb \cdot \frac{a}{b} = Na \geq N$.

Rationaalilukujen hyviin ominaisuuksiin kuuluu äärellinen esitys: jokainen rationaaliluku voidaan esittää nimittäjän ja osoittajan avulla, jotka kumpikin puolestaan voidaan esittää äärellisenä

numerojonona, vaikkapa kymmenjärjestelmässä. Rationaaliluvut ovat kuitenkin ominaisuuksiltaan rajoitettuja: ne eivät täytä lukusuoraa aukottomasti.

Esimerkki 13. (Pythagoras) Todistetaan, että yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua rationaalilukujen joukossa $\mathbb{Q}$. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan olisi sellainen supistetussa muodossa oleva rationaaliluku $\frac{m}{n}$, että $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Tästä seuraa että $m^2 = 2n^2$, ts. kokonaisluvun m neliö on parillinen. Tällöin myös m on parillinen, sillä parittomien lukujen neliöt ovat parittomia. Koska m on parillinen, voidaan kirjoittaa $m = 2m_1$ ($m_1 \in \mathbb{Z}$) ja sijoittamalla tämä yhtälöön $m^2 = 2n^2$ saadaan $4m_1^2 = 2n^2$, ts. $2m_1^2 = n^2$. Samoin kuin edellä, voidaan tästä päätellä, että n on parillinen, siis $n = 2n_1$. Tällöin siis m ja n ovat jaollisia luvulla 2, mikä on vastoin oletusta, jonka mukaan $\frac{m}{n}$ oli supistetussa muodossa. Tämän ristiriidan vuoksi vastaoletus todetaan vääräksi.

Lukuja jotka eivät ole rationaalisia, sanotaan *irrationaaliluvuiksi*, joten edellisen esimerkin sanoma voidaan pukea muotoon: $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Reaalilukujen joukossa yhtälöllä $x^2 = 2$ on jopa kaksi ratkaisua, ja positiivisesta ratkaisusta käytetään tavalliseen tapaan merkintää $\sqrt{2}$. Voidaan kuitenkin perustellusti kysyä, miksi tällainen reaaliluku $\sqrt{2}$ on olemassa tai miksi vaikkapa luvut $\sqrt[n]{a}$ ovat olemassa positiivisille kokonaisluvuille a . Jotta tähän kysymykseen olisi edes toivoa saada vastaus, tulee tietysti löytää vastaus paljon perustavampaa laatua olevaan kysymykseen: *mitä reaaliluvut ovat?*

Edellisessä luvussa todettiin, että ainakin Eukleideen päivistä asti matemaattiset teoriat on esitetty aksiomaattis-deduktiivisessa muodossa, jossa peruskäsitteet ja niiden suhteet määritellään aksiomina. Peruskäsitteiden päälle voidaan rakentaa uusia käsitteitä ja suhteita määrittelemällä.

Periaatteessa reaalilukujen teoria olisi mahdollista perustaa joukko-oppiin, jonka päälle määriteltäisiin uusia operaatioita siten että saataisiin aikaan luonnollisten lukujen $\mathbb{N}$ teoria. Tätä olisi puolestaan mahdollista laajentaa uusia käsitteitä määrittelemällä kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ teoriaksi. Laajennus kokonaisluvuista $\mathbb{Z}$ rationaalilukuihin $\mathbb{Q}$ saattaa vaikuttaa loogisesti haastavalta, mutta matemaattisten rakenteiden kannalta kyseessä on kuitenkin hyvin samankaltainen tilanne kuin siirtymässä joukosta $\mathbb{N}$ joukkoon $\mathbb{Z}$: Siinä saadaan jokaiselle kokonaisluvulle vasta-alkio yhteenlaskun suhteen, ja laajennuksessa joukosta $\mathbb{Z}$ joukkoon $\mathbb{Q}$ saadaan jokaiselle nollasta poikkeavalle luvulle käänteisalkio kertolaskun suhteen.

Viimeisin askel, laajentaminen rationaaliluvuista $\mathbb{Q}$ reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$ onnistuu niinkään joukko-opillisilla konstruktiolla. Näistä tunnetuimpia ovat *Cauchyn jonot* ja *Dedekindin leikkaukset*. Kumpaa hyvänsä käyttäen voidaan rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ päälle rakentaa reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$, ja yksi historiallisesti huomionarvoinen seikka on se, että nk. yhteismitattomien suureiden teoria, joka sai alkunsa jo Eudoksos Knidoslaisen (410/408 eaa – 355/347 eaa) töistä, on hyvin samankaltainen kuin Dedekindin (1831–1916) konstruktio. Täten voidaan sanoa, että jo muinaiset kreikkalaiset tunsivat reaalilukujen teorian ainakin jossain määrin. Heidän käsitteensä olivat kuitenkin rajoittuneet positiivisiin lukuihin, eikä teoria tiettävästi tullut antiikin aikoina erityisen tunnetuksi. Platonin kerrotaan myöhemmällä iälläan harmitelleen sitä että yhteismitattomien suureiden teoria on jäänyt liian suppean piirin tietoisuuteen.

Edellämainittu konstruktio joukko-opista reaalilukuihin asti on kuitenkin varsin työläs toteuttaa ja vaatii paljon aikaa tarkistaa kaikkien yksityiskohtien johdonmukaisuus ja oikeellisuus. Siksi näin ei yleensä menetellä edes matematiikan pääainekursseilla, vaan useimmiten reaaliluvut määritellään peruskäsitteinä, joiden väliset suhteet aksiomatisoidaan niin kutsuttuina reaalilukujen aksiomina. Näin reaaliluvut luodaan ikään kuin "tyhjästä" antamalla peruskäsitteet ja niitä hallinnoivat aksiomat.

On kuitenkin huomattava, että mikäli noudatettaisiin aiemmin esitettyä konstruktioprosessia, jossa askel kerrallaan joukko-opista siirryttäisiin lopuksi reaalilukuihin, ei pikapuoliin esitettävillä reaalilukujen aksiomilla olisikaan mitään aksiooman statusta, vaan nämä olisivat loogisesti johdettavia väittämiä alemman tason peruskäsitteistä ja aksiomista. On osoittautunut, että kaikki esitetyt prosessit reaalilukujen konstruomiseksi ovat johtaneet samaan järjestelmään, joka seuraavassa esitetään. Siksi reaalilukujen aksiomaattinen esittämien ei kuitenkaan ole "tyhjästä" luomista vaan pikemminkin vastaa sitä, että suuri osa käsitteen kehityshistoriasta jätetään yksinkertaisesti huomiotta ja lähdetään tasolta, joka on aiemmin saavutettu loogisesti ja joka nyt korotetaan aksiomaattiseen asemaan lähinnä juuri siksi, ettei tarvitsisi käydä läpi pitkää matemaattista kehityshistoriaa. Tästä joudutaan maksamaan se hinta, että peruskäsitteiden ja aksiomien määrä on suurempi kuin alemman tason käsitteisiin nojautuessa.

2.2 Reaalilukujen aksiomatiikka

Reaaliluvut määritellään joukkona $\mathbb{R}$, jossa on kaksi kaksipaikkaista operaatiota $+$ ja $\cdot$, sekä kaksi erityistä alkia $0 \in \mathbb{R}$ ja $1 \in \mathbb{R}$ siten, että seuraavat aksioomaryhmät toteutuvat: A) Kunta-aksioomat, B) Järjestysaksioomat ja C) Täydellisyysaksiooma

A) Kunta-aksioomat

1. Kaikille reaaliluvuille a, b ja c pätee $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
2. Jokaiselle reaaliluvulle a pätee $0 + a = a$ ja $1 \cdot a = a$.
3. Jokaista reaalilukua a kohti on olemassa a :n vastaluku $-a$, joka toteuttaa $a + (-a) = 0$ ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua a kohti on olemassa käänteisluku a^{-1} , joka toteuttaa $a \cdot a^{-1} = 1$.
4. Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee $a + b = b + a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$.
5. kaikille reaaliluvuille a, b , ja c pätee $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Edellämainitut aksioomat kertovat, että reaaliluvut muodostavat matematiikassa *kunnaksi* kutsutun algebrallisen järjestelmän, jossa on kaksi laskutoimitusta ($+$ ja $\cdot$), ja neutraalialkio 0 toimituksen $+$ (yhteenlasku) suhteen, sekä neutraalialkio 1 toimituksen $\cdot$ (kertolasku) suhteen, tämän kertoo aksiooma 2. Aksiooma 1 on aiemmin mainittu osittelulaki sekä yhteen- että kertolaskun suhteen, ja aksiooma 3 mahdollistaa sekä vähennys- että jakolaskun määrittelyn. Aksiooma 4 on tuttu vaihdannaislaki ja 5 osittelulaki.

Kunta-aksioomat ovat reaalilukujen algebralliset pelisäännöt: “mitä saa tehdä ja mitä ei” reaaliluvuilla, perustuu yksinomaan näihin aksioomiin ja niistä johdettuihin ominaisuuksiin.

Huomautus 2. Aksioomista seuraa suoraviivaisesti monia ominaisuuksia, kuten esimerkiksi distributiivilain “vasen” muoto $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Määritelmä 6. Vähennyslasku määritellään vastaluvun lisäämisellä: $a - b = a + (-b)$. Samoin jakolasku määritellään käänteisluvulla kertomisella: $a/b = a \cdot b^{-1}$, jos $b \neq 0$.

Esimerkki 14. Huomaa, että reaalilukujen algebran tunnettua sääntöä, jonka mukaan nolllalla kertominen tuottaa aina nollan, ei ole sisällytetty edellämainittuihin aksioomiin. Tämä ei ole tarpeen, sillä näistä aksioomista seuraa loogisesti kyseinen väittämä.

Todistus. Ensinnäkin $0 = 0 + 0$ kunta-aksiooman 2 perusteella, joten $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ kunta-aksiooman 5 perusteella. Edelleen kunta-aksiooman 3 perusteella reaaliluvulla $a \cdot 0$ on vastaluku $-a \cdot 0$, joka lisäämällä yhtälön kumpaankin puoleen saadaan $a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$. Soveltamalla kunta-aksioomia 3 ja 1 saadaan tämä sievenemään muotoon $0 = a \cdot 0$.

On olemassa hyvinkin erilaisia kuntia, siis algebrallisia rakenteita, jotka toteuttavat kunta-aksioomat, mutta niiden perusrakenne on nykyisin hyvin tunnettu. Muun muuassa rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ muodostavat tällaisen järjestelmän. Vastaavat äärelliset rakenteet muodostavat tärkeän teoreettisen osan tietosiirtotekniikan virheitä korjaaville koodeille.

Reaaliluvut on myös järjestetty joukko, mikä tarkoittaa sitä että ne toteuttavat seuraavat aksioomat:

B) Järjestysaksioomat: On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehdoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
2. Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Intuitiivinen vastine joukolle $\mathbb{R}_+$ on positiivilukujen joukko, joka on suljettu kerto- ja yhteenlaskun suhteen. Aksiomaryhmää kutsutaan järjestysaksiomiksi, koska sen avulla voidaan määritellä reaalilukujen suuruusjärjestys:

Määritelmä 7. Suurempi kuin -relaatio $a > b$ määritellään seuraavasti: $a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+$.

Huomautus 3. Relaatiot $a \geq b$, $a \leq b$ ja $a < b$ voidaan määritellä hyvin ilmeisellä analogisella tavalla.

Huomautus 4. Aksiomatiikkaan perustuen voidaan aika helposti näyttää toteen, että $(-1)a = -a$, siis minkä tahansa alkion a vastaluku $-a$ saadaan kertomalla yksikköalkion 1 vasta-alkiolla -1 (harjoitustehtävä).

Huomautus 5. Aksiomista seuraa myös melko suoraviivaisesti että $1 \in \mathbb{R}_+$, siis $1 > 0$, kuin myös että $(-1)(-1) = 1$.

Huomautus 6. Aksiomista seuraa myös loogisesti seuraava tulos, jonka mukaan epäyhtälömerkin suunta käännetään, mikäli kertoja on negatiivinen: Jos $x < y$ ja $z < 0$, niin $xz > yz$.

Edelläolevasta määritelmästä ja järjestysaksiomista seuraa tavanomaiset epäyhtälöiden käsitteleysäännöt, mm.

- Summa ei pienene jos summattavia ei pienennetä. Symbolein tämä voidaan merkitä seuraavasti: Jos $a \leq c$ ja $b \leq d$, niin

$$a + b \leq c + d.$$

Vastaava sääntö voidaan kirjoittaa myös tapauksessa, jossa summattavia ei suurenneta.

- Positiivisten lukujen tulo ei pienene jos tekijöitä ei pienennetä: Jos $0 \leq a \leq c$ ja $0 \leq b \leq d$, niin

$$ab \leq cd.$$

Yllä olevia sääntöjä sovellettaessa sanotaan, että a :ta on *arvioitu ylöspäin* c :ksi ja b :tä d :ksi. Säännöt yleistyvät suoraviivaisesti myös tapaukseen, jossa summattavia tai tulon tekijöitä on enemmän kuin kaksi.

- Positiivisten lukujen osamäärä ei pienene, jos osoittajaa ei pienennetä ja nimittäjää ei suurenneta: Jos $0 \leq a \leq c$ ja $b \geq d > 0$, niin

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}.$$

Vastaava sääntö voidaan kirjoittaa myös tapaukselle, jossa osoittajaa pienennetään ja nimittäjää suurennetaan.

Määritelmä 8. Reaalilukujen joukossa määritellään *itseisarvo* seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0. \\ -x & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

On melko helppoa todeta, että itseisarvo toteuttaa seuraavat ehdot:

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x| |y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$.
- Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Epäyhtälöä (5) kutsutaan *kolmioepäyhtälöksi* ja se seuraa suhteellisen helposti yllämainituista ominaisuuksista, mutta on joka tapauksessa hyvä painaa mieleen jo tässä vaiheessa. Itseisarvon käsitteen avulla voidaan reaalilukujen joukkoon määritellä geometria, joka yksinkertaisesti perustuu etäisyyden määritelmään.

Epäyhtälö (6) seuraa loogisesti kolmioepäyhtälöstä ja sitä kutsutaan joskus *kolmioepäyhtälön vasemmaksi puoleksi*.

Määritelmä 9 (Metriikka). Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Seuraava lause on helppo todentaa oikeaksi:

Lause 3. Kaikille reaaliluvuille x, y ja z pätee

- $d(x, y) \geq 0$ ja $d(x, y) = 0$ vain jos $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Viimeisintä epäyhtälöä kutsutaan niinikään kolmioepäyhtälöksi. Tämän nimityksen varsinainen merkitys paljastuu vasta vähintään kaksiulotteisia rakenteita tarkastaellessa.

Seuraava lause kertoo, että sekä summa että tulo ovat yhteensopivia reaalilukujen metriikan suhteen siinä mielessä, että mikäli yhteenlaskettavia (tai tekijöitä) muutetaan vain vähän, niin myös summa (tai tulo) muuttuu vain vähän. Lauseessa siis oletetaan, että $a \approx c$ ja $b \approx d$.

Lause 4. Oletetaan, että luvut a, b, c ja d ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin $M > 0$. Tällöin sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

Todistus. Summaa koskeva väittämä seuraa arviosta

$$d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$$

ja tuloa koskeva arvioista

$$\begin{aligned} d(ab, cd) &= |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| = |a(b - d) + (a - c)d| \leq |a||b - d| + |a - c||d| \\ &= |a|d(b, d) + |d|d(a, c) \leq M(d(b, d) + d(a, c)). \end{aligned}$$

Esimerkki 15.

$$d(x^2, 9) = |x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)| = |x + 3|d(x, 3).$$

Jos x on niin lähellä lukua 3 että $d(x, 3) < 1$, on silloin $2 < x < 4$ ja siksi $|x + 3| < 4 + 3 = 7$. Tällöin siis $d(x^2, 9) < 7d(x, 3)$.

Tämä merkitsee sitä että jos x on lähellä lukua 3 (etäisyys $d(x, 3)$ on pieni), niin silloin x^2 on lähellä lukua 9, eli etäisyys $d(x^2, 9)$ on pieni.

On syytä huomioda, että edellämainitut kunta- ja järjestysaksioomat pätevät myös rationaaliluvuille $\mathbb{Q}$. Rationaaliluvut eivät kuitenkaan toteuta viimeisintä, niin sanottua täydellisyysaksioomaa. Tämän esittämistä varten määritellään seuraavat käsitteet.

Määritelmä 10. Reaalilukujoukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku M , että $x \leq M$ pätee kaikille $x \in A$. Lukua M kutsutaan joukon A *ylärajaksi*.

Määritelmä 11. Joukon A pienintä ylärajaa S merkitään $S = \sup A$ ja kutsutaan *supremumiksi*.

Lause 5. $S = \sup A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq S) \wedge (\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists x \in A)(x > S - \varepsilon))$

Huomaa, että jos M on joukon A yläraja, niin myös mikä hyvänsä lukua M suurempi luku $M_1 > M$ on yläraja.

Huomautus 7. Lause 5 on luvun $S = \sup A$ luonnehdinta. Se ilmaisee, että ensinnäkin jokainen A :n alkio on korkeintaan S :n suuruinen (siis S on jokin yläraja) Toiseksi, jos ylärajasta S vähennetään mikä hyvänsä positiiviluku ε , niin $S - \varepsilon$ ei ole joukon A yläraja ja löytyy $x \in A$, joka ylittää luvun $S - \varepsilon$. Näin ollen S on ylärajoista pienin.

C) Täydellisyysaksiooma: Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on pienin yläraja.

Kysymykseen reaalilukujen olemuksesta on siis vastattu esitetyllä aksiomaattisella menetelmällä: reaaliluvut ovat joukko, jossa on määritetty yhteen- ja kertolasku ja alkio 0 ja 1 jotka toteuttavat reaalilukujen Kunta-, järjestys- ja täydellisyysaksioomat.

Huomautus 8. Jos reaalilukujoukossa A on *suurin* alkio $M = \max A$, on samalla myös $M = \sup A$. Kaikissa reaalilukujoukoissa ei kuitenkaan ole suurinta (eikä pienintä) alkioita. Jos esimerkiksi $A = (0, 1)$, ei A :lla ole maksimia eikä minimiä.

Täydellisyysaksiooman nojalla jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa pienin yläraja. Pienimmän ylärajan olemassaolo on juuri se ominaisuus, joka täydentää rationaalilukujoukon aukottomaksi reaalilukujoukoksi.

Esimerkki 16. Esimerkin 13 perusteella joukolla $\{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 1 \wedge q^2 \leq 2\}$ ei voi olla pienintä ylärajaa rationaalilukujen joukossa. Sen sijaan reaalilukujen joukossa sillä on pienin yläraja jota merkitään symbolilla $\sqrt{2}$.

Kääntämällä asetelma nurinpäin, siis tarkastelemalla joukkoa $-A = \{-a \mid a \in A\}$ joukon A sijaan voidaan pienimmän ylärajan sijaan puhua *suurimmasta alarajasta*. Muunnosta $A \rightarrow -A$ hyväksi käyttäen voidaan todeta, että täydellisyysaksiooma takaa suurimman alarajan olemassaolon, jos A on *alhaalta rajoitettu* epätyhjä reaalilukujoukko.

Määritelmä 12. Reaalilukujoukon A suurinta alarajaa kutsutaan nimellä *infimum* ja siitä käytetään merkintää $\inf A$.

Huomautus 9. Jos joukossa A on pienin alkio $\min A$, on $\min A = \inf A$.

Huomautus 10. Jos $A \subseteq B$ on epätyhjä sekä B ylhäältä rajoitettu, on myös B epätyhjä ja A ylhäältä rajoitettu sekä $\sup A \leq \sup B$. Analoginen tulos pätee infimumille: $\inf B \leq \inf A$.

2.3 Aksiomatiikan seurauksia

Reaaliluvuille pätee monia rationaaliluvuille tuttuja tuloksia, kuten esimerkiksi kahden eri reaaliluvun välissä a ja b on aina mm. näiden keskiarvo $\frac{1}{2}(a + b)$. Erityisesti ei ole olemassa pienintä positiivilukua, vaan mitä tahansa positiivilukua ε kohti voidaan löytää pienempi positiiviluku $\frac{\varepsilon}{2}$.

Myös rationaaliluvuille tuttu tulos on voimassa, mutta todistus pitää esittää toisella tavalla.

Lause 6 (Arkhimedeen aksiooma). Jos M ja ε ovat positiivisia reaalilukuja, on olemassa sellainen kokonaisluku N , että $N\varepsilon > M$.

Todistus. Tehdään vastaoletus, jonka mukaan väitettyä lukua N ei ole olemassa, siis $n\varepsilon \leq M$ kaikille luonnollisille luvuille n . Tällöin siis joukko $A = \{n\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ on ylhäältä rajoitettu. Joukko on A selvästi epätyhjä, joten sillä on täydellisyysaksiooman nojalla pienin yläraja $S = \sup A$. Koska ε oletettiin positiiviseksi ja S joukon A pienimmäksi ylärajaksi, ei $S - \varepsilon$ voi olla joukon A yläraja. Tämän vuoksi joukossa A on alkio $m\varepsilon$, joka ylittää luvun $S - \varepsilon$, siis

$$m\varepsilon > S - \varepsilon,$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälön

$$(m+1)\varepsilon > S$$

kanssa. Nyt kuitenkin $(m+1)\varepsilon \in A$, joten S ei olekaan joukon A yläraja. Ristiriidasta voidaan päätellä vastaoletus vääräksi. $\square$

Huomautus 11. Lauseen 6 on alunperin kutsuttu Arkhimedeen aksioomaksi, sillä vastaava tulos Arkhimedeen (n. 287 – 212 eKr) käyttämänä geometrisessa yhteydessä käsitettiin aikanaan aksioomana. Nykymatematiikassa tällä tuloksella ei ole aksiooman statusta, vaan nimitys on ainoastaan historiallista perua.

Määritelmä 13. Luku $\varepsilon > 0$ on *infinitesimaali* (äärettömän pieni), jos

$$n\varepsilon = \underbrace{\varepsilon + \dots + \varepsilon}_{n \text{ kpl}} \leq 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lauseen 6 sanoma voidaan siis ilmoittaa siten, että reaalilukujen joukossa **ei ole** infinitesimaaleja. Juuri näin myös Arkhimedes asian mielsi aikakautensa käsitteiden valossa. Koska differentiaalilaskennan kehittäjät Newton ja Leibniz kaiketi tunsivat Arkhimeden työt varsin hyvin, on matematiikan historian kannalta vähintäänkin mielenkiintoista että rakensivat teoriansa nimenomaan infinitesimaalien varaan.

Reaalilukujen joukossa ei niinkään ole ääretöntä, vaan jokaista lukua $M \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa suurempi luku, esimerkiksi $M+1 > M+0 = M$. Symboleja ∞ ja $-\infty$ käytetään tällä kurssikokonaisuudella vain raja-arvomerkitöjen yhteydessä, jolloin ne eivät viittaa aktuaaliseen (eli todella olemassa olevaan) äärettömyyteen, vaan toimivat vain merkintöinä, jotka viittaavat siihen, että muuttuja voidaan valita miten suureksi ($\rightarrow \infty$) tai miten pieneksi ($\rightarrow -\infty$) tahansa.

Seuraus 1. Jos $a < b$, on välillä (a, b) rationaaliluku.

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $b \geq 0$ ja merkitään $d = b - a$. Lauseen 6 mukaan on olemassa sellainen kokonaisluku N , että $N \cdot 1 > \frac{1}{d}$, mikä merkitsee, että $d > \frac{1}{N}$. Lauseen 6 perusteella on myös olemassa sellainen kokonaisluku n , että $n \cdot 1 \geq Nb$. Olkoon M pienin tällaisista kokonaisluvusta, jolloin siis $M-1 < Nb \leq M$. Tämä merkitsee sitä, että $\frac{M-1}{N} < b \leq \frac{M}{N}$. Lisäksi

$$\frac{M-1}{N} = \frac{M}{N} - \frac{1}{N} > b - d = b - (b - a) = a,$$

mikä osoittaa, että $\frac{M-1}{N}$ voidaan valita väitteessä mainituksi rationaaliluvuksi.

Jos $b < 0$, voidaan väittämä todistaa oikeaksi soveltamalla edellistä päättelyä väliin $(-b, -a)$. $\square$

Seuraus 2. Jos $x \in (a, b) = A$, on olemassa sellaiset rationaaliluvut q_1 ja q_2 , että $x \in [q_1, q_2] \subseteq A$.

Seuraus 3. Jos $\alpha \in \mathbb{R}$, ja $n \in \mathbb{N}$, niin on olemassa sellainen rationaaliluku $q = \frac{a}{b}$, että $|\alpha - q| < \frac{1}{n}$.

Todistus. Edellisen seurauksen mukaan reaalilukuvälillä $(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n})$ on olemassa rationaaliluku q , siis $\alpha - \frac{1}{n} < q < \alpha + \frac{1}{n}$, mistä seuraa $-\frac{1}{n} < q - \alpha < \frac{1}{n}$. Viimeisin epäyhtälöketju merkitsee sitä, että $|q - \alpha| < \frac{1}{n}$. $\square$

Huomautus 12. Edellinen seuraus ilmaisee sen, että minkä hyvänsä reaaliluvun α miten pienestä läheisyydestä tahansa voidaan aina löytää rationaaliluku. Toisin ilmaistuna: mitä hyvänsä reaalilukua voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaaliluvuilla. Käyttämällä tietoa että $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ on mahdollista muokata edellisen lauseen todistusta sen toteennäyttämiseksi, että kaikilla reaalilukuväleillä on myös aina irrationaaliluku.

Luku 3

Yleisimmät reaalifunktiot

3.1 Terminologiaa

Määritelmä 14. Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*. Joukkoa A kutsuaan *lähtöjoukoksi* tai *määrittelyjoukoksi* ja joukkoa B *maalijoukoksi*.

Tässä yhteydessä ”funktio” ymmärretään lukiokurssin pohjalta esitettynä intuitiivisena käsitteenä. Funktio siis mielletään ikään kuin ”operaationa”, joka siirtää x :n (alkukuva) kuvaksi $y = f(x)$.

Geometriasta kumpuavien syiden vuoksi reaalilukujen joukkoa $\mathbb{R}$ nimitetään myös *reaalisuoraksi* tai *reaaliakseliksi*, ja sen alkioita (siis reaalilukuja) *pisteiksi*,

Tässäkin intuitiivisessa käsityksessä voidaan otta huomioon se, että funktiota ei välttämättä ole tarpeen tai voida määritellä koko tarkastatelujoukossa, joka lähtökohtaisesti saattaisi olla koko reaaliksieli $\mathbb{R}$. Samoin voidaan huomioida, että funktion arvot eivät kenties peitä koko reaalilukujen joukkoa, vaan ainoastaan osan siitä. On myös huomattava, että funktion käsitteeseen liittyy olennaisena osana sekä määrittelyjoukko että maalijoukko. Vaikka näitä ei aina eksplisiittisesti mainittaisi, ne sisältyvät silti olennaisena osana funktion käsitteeseen.

Näin ollen esimerkiksi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ käsitetään erilaisena funktiona kuin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, missä ensimmäisen funktion maalijoukko on koko $\mathbb{R}$, mutta jälkimmäisen vain $\mathbb{R}_+$.

Seuraavat määritelmät on syytä painaa mieleen, sillä ne tulevat esille myöhemmin kurssikokonaisuuden eri osissa.

Määritelmä 15. Olkoon $f : A \rightarrow B$ reaalifunktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Huomautus 13. Injektiivisyys esittää myös muodossa (mieti miksi!)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Tätä kutsutaan ylläolevan esitystavan loogiseksi kontrapositioksi.

Määritelmä 16. Reaalifunktiolle $f : A \rightarrow B$ määritellään seuraavasti:

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$.

- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Määritelmä 17. Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektiivinen.

Määritelmä 18. Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \rightarrow C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunktioksi*

Esimerkki 17. Jos $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = e^x$, on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}.$$

Määritelmä 19. Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \rightarrow A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f :n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Seuraava lause karakterisoi (luonnehtii) ne reaalifunktiot, joille käänteisfunktio on olemassa.

Lause 7. Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio.

1. Funktiolla $f : A \rightarrow B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \rightarrow A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.
2. Jos funktio on (aidosti) kasvava/vähenevä, niin myös sen käänteisfunktio on.

3.2 Polynomi- ja rationaalifunktiot

Määritelmä 20 (Polynomifunktiot). Polynomifunktio $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään lausekkeella

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$.

Huomautus 14. Erityisesti huomionarvoista polynomifunktioissa on se, että niiden määrittelyssä ei tarvita muuta kuin reaalilukujen ”sisäänrakennettuja” laskutoimituksia: yhteen- ja kertolasku. Kokonaislukupotenssiin korotushan on toistettua kertolaskua. Tästä seuraa muun muassa se, että polynomin arvon laskeminen tietyllä muuttujan arvolla on varsin selkeää, mikäli muuttuja ja kertoimet on annettu jossain systemaattisessa muodossa rationaalilukuina tai niiden approksimaatioina. Tällöin on periaatteessa mahdollista laskea funktion arvo vaikkapa kynää ja paperia käyttäen, mutta nykyisin mielekämpi tapa on ajatella, että funktion arvon (approksimatiiviseen) laskemiseen voidaan

laatia tietokoneohjelma. Sellaisia on tietysti jo laadittu vaikka kuinka paljon, mutta tämän kurssin tavoitteiden kannalta on tärkeää hallita ne periaatteet, joiden pohjalta mainitut ohjelmat voitaisiin laatia.

Seuraava laajennus ei ole numeeriselta kannalta kovin paljon vaikeampi kuin polynomifunktiot, mutta korostaa sitä, että reaalifunktion ei välttämättä tarvitse olla määritelty koko reaaliakselilla.

Määritelmä 21. Rationaalifunktiot määritellään kahden polynomin osamääränä

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille $q(x) = 0$.

Esimerkki 18. Lauseke $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ määrittelee polynomifunktion, joka on määritelty koko reaaliakselilla $\mathbb{R}$. Lauseke $r(x) = \frac{1+x}{1-x}$ määrittelee rationaalifunktion, kun $x \neq 1$.

3.3 Eksponenttifunktiot

Tässä osiossa tarkastellaan miten eksponenttifunktio voidaan määritellä. Kiinnitetään ensiksi kantaluku $a \in \mathbb{R}_+$ ja määritellään jokaiselle $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}.$$

Määritelmästä seuraa selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn} \tag{3.1}$$

aina kun m ja $n \in \mathbb{N}$. Määritelmää pyritään laajentamaan siten, että ominaisuudet (3.1) toteutuisivat myös laajennuksessa.

Näin toimien voidaan havaita, että

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0,$$

mistä seuraa että $a^0 = 1$, sillä $a \in \mathbb{R}_+$.

Eksponenttifunktion laajennus negatiivisille kokonaisluvuille voidaan niinikään tehdä vaatimalla että (3.1) toteutuu. Silloin nimittäin

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n} a^n,$$

josta

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi miten pitäisi määritellä $a^{\frac{1}{n}}$, kun $n \in \mathbb{N}$. Tätä varten otetaan käyttöön seuraava määritelmä.

Määritelmä 22. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Luku $\alpha > 0$ on luvun $a > 0$ n :s juuri, jos $\alpha^n = a$. Tällöin merkitään $\alpha = \sqrt[n]{a}$. Tapauksessa $n = 2$ juurta kutsutaan *neliöjuureksi* ja tapauksessa $n = 3$ *kuutiojuureksi*.

Huomautus 15. Otaksoma $a \in \mathbb{R}_+$ on tarpeen juuren olemassaolon takaamiseksi. Jos esimerkiksi $a = -1$, ei ole sellaista reaalilukua α , että $\alpha^2 = -1$. Tämä voidaan ilmaista myös sanomalla, että luvulla -1 ei ole reaalista neilöjuurta.

Esimerkki 19. Sekä $2^2 = (-2)^2 = 4$, mutta määritelmän mukaan neliö- ja muut juuret ovat positiivisia lukuja, siis $\sqrt{4} = 2$.

Koska $(-2)^3 = -8$, olisi johdonmukaista määritellä $\sqrt[3]{-8} = -2$. Näin ei kuitenkaan tehdä tällä kurssilla, vaan juuren määritelmässä rajoitaudutaan positiivisiin juurrettaviin. Kurssin seuraavassa osassa esiteltävä kompleksilukujen käsite paljastaa, että juuren käsite voidaan myös parillisessa tapauksessa laajentaa negatiiviselle reaaliakselille ja mikä vielä tärkeämpää, että tällöin juurikäsitettä ei kannata tarkastella funktiona vaan pikemminkin näitä yleisemmän kattokäsitteen – relaatioiden – valossa.

Huomautus 16. Vaikka $a > 0$, ei juuren $\sqrt[n]{a}$ olemassaolo silti ole mitenkään itsestään selvää. Palauta mieleen Pythagoraan löytö, jonka mukaan rationaalilukujen joukossa ei ole merkinnällä $\sqrt{2}$ luonnehdittavaa lukua. Reaalilukujen joukossa sen sijaan juuren $\sqrt[n]{a}$ olemassaolo voidaan todistaa täydellisyysaksioomaan nojautuen.

Reaalisen juuren yksikäsitteisyys on hyvin helppo todeta sen perusteella, että kun $n \in \mathbb{N}$, on funktio $f(x) = x^n$ kasvava positiivisella reaaliakselilla.

Ominaisuuksien (3.1) valossa pitäisi olla

$$a = a^{\frac{1}{n} \cdot n},$$

jolloin voidaan siis todeta, että $a^{\frac{1}{n}}$ pitää nimenomaan määritellä $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Koska jokainen rationaaliluku voidaan kirjoittaa muodossa $r = \frac{m}{n}$, missä $m \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$, voidaan tämän jälkeen suoraviivaisesti määritellä

$$a^r = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Esimerkki 20. $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$.

Viimeisin vaihe eksponenttifunktion määrittelyjoukon laajentamisessa on ponnistaa määrittelyjoukosta $\mathbb{Q}$ määrittelyjoukkoon $\mathbb{R}$. Oletetaan tätä varten aluksi että $a > 1$. Aiemmin esitettyjen käsitteiden valossa laajennus on periaatteessa yksinkertaista: Jos $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, valitaan sellainen jono $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$ rationaalilukuja, että $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ ja määritellään

$$a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}.$$

Tapaus $0 < a < 1$ voidaan palauttaa tapaukseen $a > 1$ yhtälön $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ kautta.

Tämä määritelmä tarkoittaa käytännössä sitä, että mikäli irrationaalilukua x voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti rationaalilukujonon $r_1, r_2, r_3, \dots$ avulla, saadaan vastaavasti arvolle a^x mielivaltaisen tarkkoja approksimaatioita reaalilukujonon $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$ avulla.

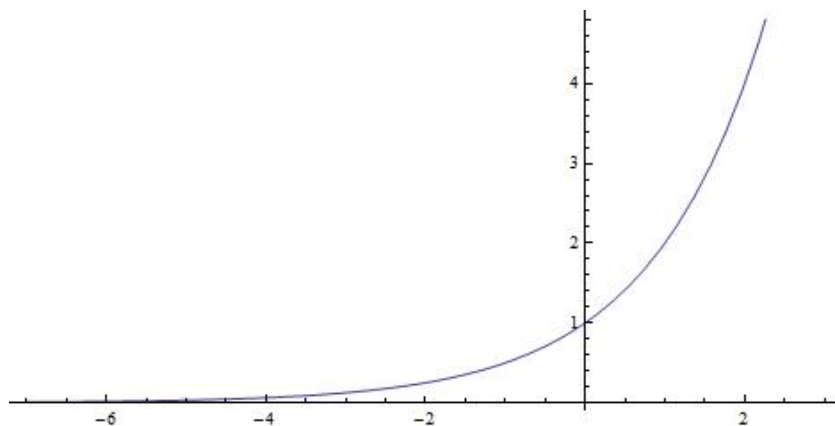
Tämä määrittely vaikuttaa hyvin johdonmukaiselta, mutta sisältää kuitenkin joitakin kyseenalaisia seikkoja. Näistä ensimmäinen on se, että irrationaalilukua x kohti lähestyviä rationaalilukujonoja on äärettömän monta, miksi siis a^x on aina sama riippumatta siitä mikä jono valitaan? Seuraava ongelma lienee tarkistaa että ominaisuudet (3.1) toteutuvat myös koko reaaliakselilla määritellylle a -kantiselle eksponenttifunktiolle. Näitä ei kuitenkaan ryhdytä tarkistamaan tällä kurssilla, vaan esitetään seuraava lause ilman todistusta.

Lause 8. Olkoon $a > 0$. Edellä kuvatulla menettelyllä voidaan määritellä eksponenttifunktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$ joka toteuttaa seuraavat ehdot:

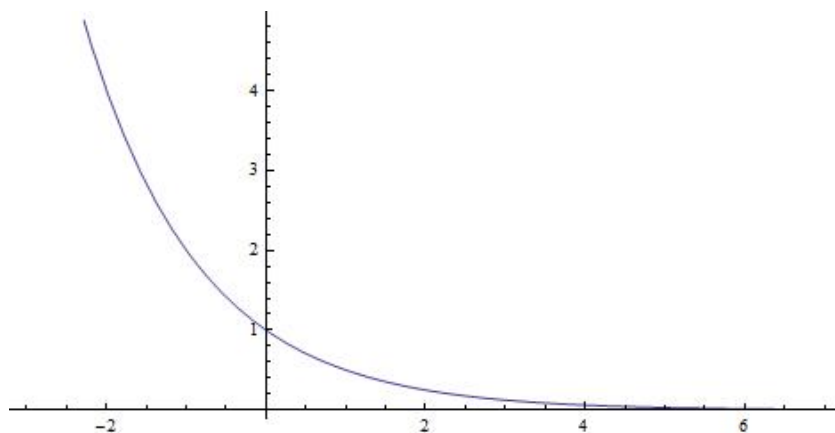
- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos $0 < a < 1$, on f aidosti vähenevä ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun x pienenee rajatta
- Arvoilla $a > 1$ f on aidosti kasvava ja f :n arvot lähestyvät nollaa kun x pienenee rajatta ja f :n arvot kasvavat rajatta kun x kasvaa rajatta

- Molemmissa tapauksissa f on bijektio.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$

Huomautus 17. Laskennalliselta kannalta erityisen huomionarvoinen on viimeisin kohta, joka kertoo sen, että mikäli tunnetaan menetelmä a -kantaisen eksponenttifunktion (liki)arvojen laskemiseksi sekä yhteys $b = a^c$, niin tästä saadaan menetelmä b -kantaisen eksponenttifunktion (liki)arvojen laskemiseksi.



Kuva 3.1 $y = 2^x$



Kuva 3.2 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.4 Logaritmifunktiot

Määritelmä 23. Olkoon $a > 0$. Tällöin a -kantainen logaritmifunktio $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään a -kantaisen eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Huomautus 18. Määritelmästä seuraa, että $a^{\log_a y} = y$ aina kun $y \in \mathbb{R}$ ja $\log_a a^x = x$ aina kun $x \in \mathbb{R}$

Seuraavan lauseen väittämät seuraavat suoraan eksponenttifunktion ominaisuuksista.

Lause 9. Logaritmifunktio toteuttaa seuraavat ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$.
- Jos $b = a^c$, on $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$ ja siis
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{c}$

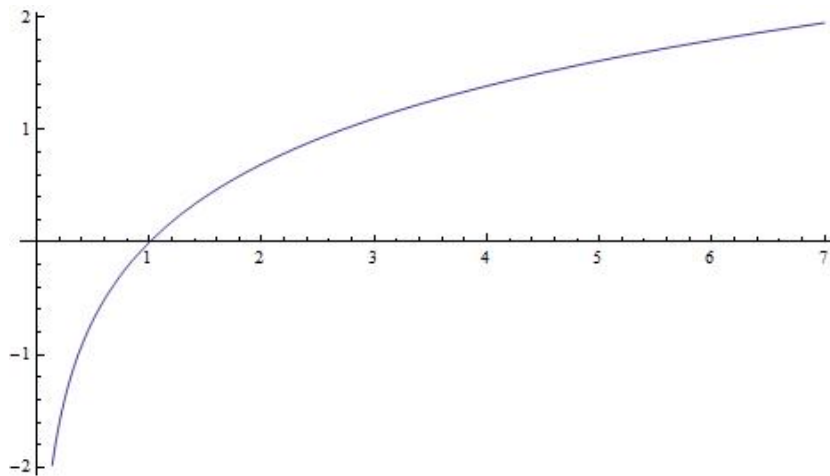
Huomautus 19. Laskennalliselta kannalta viimeisin kohta on hyvin merkittävä. Se kertoo, että jos a -kantaisen logaritmiin (liki)arvojen laskemiseksi on olemassa jokin menetelmä, niin silloin on myös menetelmä b -kantaisen logaritmin (liki)arvojen laskemiseksi.

On myös huomattava, että yhtälöstä $b = a^c$ seuraa $c = \log_a b$.

Määritelmä 24. Neperin luku $e = 2,71828182845904523536 \dots$ on irrationaaliluku jonka tarkempaan määritelmään pureudutaan vasta kurssin seuraavissa osissa.

Sekä e -kantaiselle eksponenttifunktiolle että e -kantaiselle logaritmille on kuitenkin olemassa vakiintuneet merkinnät, e^x merkitään usein $\exp(x)$ ja $\log_e x$ yleensä $\ln x$. Kymmenkantaiselle logaritmille on myös olemassa melko vakiintunut merkintä $\log_{10} x = \lg x$

Huomautus 20. e -kantaista logaritmia kutsutaan nimellä *luonnollinen logaritmi*. Merkintöjen e^x ja $\exp(x)$ suhteesta on matemaattisessa kirjallisuudessa muitakin tulkintoja, mutta $\log_e x$ ja $\ln x$ käsitellään poikkeuksetta saman asian eri merkinnöiksi.



Kuva 3.3 $y = \ln x$

Esimerkki 21. Kuinka suureksi x pitää valita, että $2^x > 10^9$?

Koska eksponenttifunktio $f(x) = 2^x$ on aidosti kasvava ja $\log_2$ tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x > 9 \log_2(10) = 29.897 \dots$$

3.5 Trigonometriset funktiot

Edelläkuvattujen lisäksi yksi varsin yleisesti esiintyvän reaalifunktiotyyppin muodostavat *trigonometriset funktiot*. Trigonometriset funktiot voidaan määritellä täsmällisesti sarjaopin avulla, mutta tässä yhteydessä tyydytään intuitiivisempaan kuvailuun.

Kulman suuruus on perinteisesti esitetty jakamalla täysi ympyrä 360 asteeseen, jolloin puoliympyrän suuruudeksi saadaan 180° ja suoran kulman suuruudeksi 90° . Vaikka tämänkaltainen valinta juontaa juurensa viiden vuosituhannen takaisesta sumerilaisten lukujärjestelmästä, on valinta 360 täyden ympyrän mitaksi silti matemaattiselta kannalta mielivaltainen, vaikkakin hyvin vakiintunut.

Differentiaali- ja integraalilaskennan kannalta kulman suuruus tulee määritellä absoluuttisissa yksiköissä joille on annettu nimi *radiaani*, mutta joihin voidaan yhtä lailla viitata ilman mitään yksikköä, sillä kyseessä on suhdeluku.

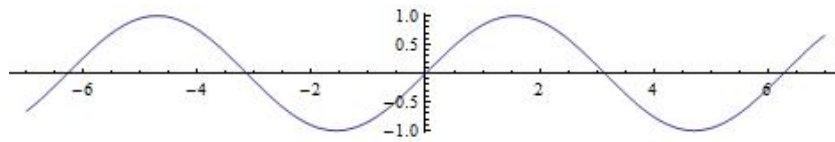
Määritelmä 25 (Kulman suuruus). Ympyräsektorin kulman suuruus on sektorin kaaren pituus jaettuna säteen pituudella. Tällöin kulma x (asteissa) voidaan muuntaa kulmaksi y (radiaaneissa) seuraavasti: $y = \frac{\pi}{180}x$. Suoran kulman suuruus on siis $\frac{\pi}{2}$, oikokulman π ja täyden ympyrän 2π .

Määritelmä 26 (Sini ja kosini). Kulman, joka kiertyy positiiviselta x -akselilta vastapäivään *kehäpiste* on origokeskisen yksikköympyrän ja kulman vasemman kyljen leikkauspiste. Tämän kulman *sini* on kehäpisteen y -koordinaatti ja *kosini* x -koordinaatti.

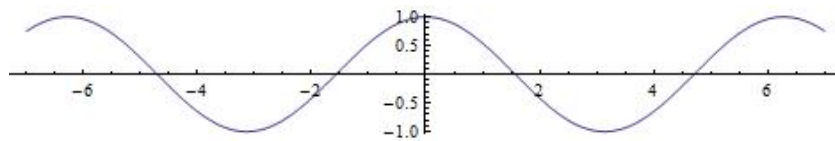
Käyttämällä moninkertaisia kierroksia sekä myötäpäivään kiertymistä voidaan sini ja kosini määritellä kaikille mahdollisille reaaliluvuille. Edelleen huomataan, että sini ja kosini voivat saada arvoja vain väliltä $[-1, 1]$, mutta huomattavin ominaisuus on, että kumpikin funktio on *jaksollinen*:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi)$$

kaikille mahdollisille reaaliluvuille x . Trigonometriset funktiot toteuttavat lukuisia identiteettejä (yhtäsuuruuksia, jotka pätevät kaikille muuttujan arvoille) joita on listattu taulukoihin. Näistä tunnetuimpia ovat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Myös identiteetti $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ on huomattava, sillä siitä ilmenee että kosini ja sini ovat itse asiassa koordinaatiston siirtoa vaille samat funktiot.



Kuva 3.4 $y = \sin x$



Kuva 3.5 $y = \cos x$

Määritelmästä nähdään helposti myös oikeaksi seuraava tulos.

Lause 10 (Sinin ja kosinin nollakohdat).

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

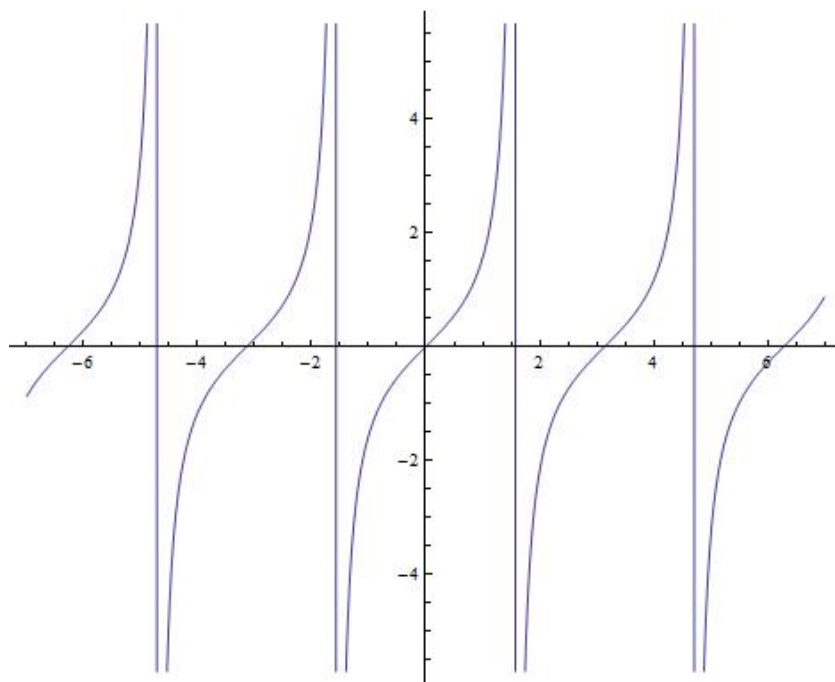
Funktiona $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sini ei ole surjektio, sillä se saa vain välillä $[-1, 1]$ olevia arvoja. Sini ei myöskään ole injektio, sillä se on jaksollinen ja saa täten samoja arvoja 2π :n välein. Näin ollen sini ei ole bijektio eikä sillä siis ole käänteisfunktioita. Sopivasti lähtö- ja maalijoukkoa rajoittamalla sinistä saadaan aikaan bijektio, esimerkiksi

funktio $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ on bijektio, jonka käänteisfunktioita kutsutaan *arkussiniksi* ja merkitään $\arcsin x$ tai $\sin^{-1}x$.

Arkuskosini $\arccos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ määritellään analogisesti.

Tangentti voidaan määritellä kaavalla $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, jolloin saadaan kaikilla muilla reaaliarvoilla paitsi joukossa $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ määritelty funktio. Osoittautuu, että tangentti on π -jaksollinen funktio, joka on kasvava välillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ja saa kaikki reaaliarvot tällä välillä.

Funktio $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ on bijektio ja sen käänteisfunktioita kutsutaan *arkustangentiksi*.



Kuva 3.6 $y = \tan x$

3.6 Trigonometrinen funktioiden ominaisuuksia

Lause 11. Sini ja kosini toteuttavat seuraavat väittämät:

- $\sin(-t) = -\sin t$
- $\cos(-t) = \cos t$
- $\cos(t + \pi) = -\cos t$
- $\sin(t + \pi) = -\sin t$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

Todistus. Kaksi ensimmäistä väitettä seuraa siitä, että muutettaessa kulman merkkiä kehäpiste peilaantuu x -akselin suhteen. Näin ollen x -koordinaatti ($\cos t$) säilyy ja y -koordinaatti ($\sin t$) vaihtaa merkkiä. Kaksi seuraavaa väitettä johtuvat siitä, että puoliympyrän lisääminen kulmaan vastaa kehäpisteen peilaamista origon suhteen.

Edellämainitun perusteella väittämän $|\sin x| \leq |x|$ todistamiseksi riittää käsitellä tapausta $x \geq 0$. Lisäksi voidaan olettaa, että $x \leq 1$, koska joka tapauksessa $\sin x \leq 1$. Kulma $0x = 1 < \frac{\pi}{2}$, ja tämä väittämä perustellaan geometriseen intuitioon nojautuen: $\sin x$ vastaa matkaa kehäpisteeltä kohtisuoraan x -akselille, kun taas x vastaa matkaa kehäpisteeltä yksikköympyrän kaarta pitkin x -akselille, joten $\sin x < x$.

Viimeisin väittämä on erikoistapaus trigonometrisista summatuloiksi -kaavoista eikä sitä perustella tarkemmin.

Huomautus 21. Ylläolevan lauseen viimeisimmästä väittämästä on kuitenkin välittömiä seurauksia trigonometrinen funktioiden ominaisuuksiin. Nyt nimittäin

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|, \end{aligned}$$

siis $d(\sin x, \sin y) \leq d(x, y)$. Samoin voidaan osoittaa, että $d(\cos x, \cos y) \leq d(x, y)$.

Määritelmä 27. Olkoon $I \subseteq \mathbb{R}$. Funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on *kutistava* joukossa I , jos $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ aina kun $x, y \in I$.

Kutistavuus tarkoittaa siis sitä, että kuvat $f(x)$ ja $f(y)$ ovat lähempänä toisiaan kuin alkukuvat x ja y . Yllämainitun perusteella sini ja kosini ovat kutistavia funktioita koko reaaliakselilla.

3.7 Reaalifunktioiden esitystapoja

Määritelmä 28.

- Reaalifunktion esittämistä lausekkeen avulla, esimerkiksi $f(x) = x^2$, sanotaan *eksplisiittimuodoksi*.
- *Implisiittimuodossa* funktio f ilmaistaan yhtälöiden $F(x, y) = 0$ ja $y = f(x)$ avulla. Esimerkiksi $xy - 1 = 0$ määrittelee implisiittisesti funktion, jolle pätee $y = f(x) = \frac{1}{x}$ kun $x \neq 0$.
- *Parametrimuodossa* reaalifunktio f määritellään kahden muun reaalifunktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ja $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ määrittämän pisteistön $\{(g(t), h(t)) \mid t \in I\}$ avulla siten, että $x = g(t)$ ja $y = f(x) = h(t)$. Muuttujaa t kutsutaan *parametriksi*.

Esimerkki 22. Lauseke $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ määrittelee reaalifunktion välillä $[-1, 1]$ *eksplisiittisesti*. Eksplisiittiselle määrittelylle tyypillistä on se, että se tarjoaa laskennallisesti suoraviivaisen tavan funktion (likimääräisen) arvon laskemiselle, olettaen että laskennalliset menetelmät tunnetaan osafunktioille, tässä tapauksessa neliöinnille $x \mapsto x^2$, vähennyslaskulle $x^2 \mapsto 1 - x^2$ ja neliöjuuren laskemiselle.

Yhtälö $x^2 + y^2 = 1$ määrittelee saman funktion *impisiittisesti*. Jotta tästä määritelmästä saataisiin funktio, pitää rajoittaa esim. $y \geq 0$ ja myös x sopivalle välille, esim $x \in [-1, 1]$.

Parametrimuoto implisiittimuotoiselle funktiolle $x^2 + y^2 = 1$ perustuu sinin ja kosinin määrittelymään: Valitaan parametriksi kulma $t \in [0, \pi]$. Tällöin piste $(\cos t, \sin t)$ kuuluu yksikköympyrän yläpuolelle. Kun $t = 0$, kyseessä on piste $(1, 0)$, ja kun $t = \pi$, saadaan piste $(-1, 0)$. Kutakin parametrin arvoa $[0, \pi]$ vastaa yksikäsitteinen yksikköympyrän yläpuolen piste.

Huomautus 22. Parametrimuoto voidaan tulkita myös liikkeenä xy -tasossa: Parametri t tulkitaan ajaksi, jolloin ajanhetkellä $t \in [0, \pi]$ tarkasteltavan pisteen koordinaatit ovat $(\cos t, \sin t)$.

Luku 4

Raja-arvo ja jatkuvuus

4.1 Differentiaali- ja integraalilaskennan kehityksestä

Matematiikan historian tutkimus on osoittanut, että jo muinaiset kreikkalaiset, tai ainakin yksi heistä, Arkhimedes, tunsivat integraalilaskennan suunnilleen kahdeksantoista vuosisataa ennen Newtonia ja Leibnizitä. Erityisen huomionarvoista nykyaikaisesta näkökulmasta on se, että Arkhimedeen antiikkinen integraalilaskenta oli loogisilta perusteiltaan huomattavasti johdonmukaisempi kuin uutta aikaa edustaneiden Newtonin ja Leibnizin esitykset. Arkhimedes kykeni kehittämänsä integraalilaskennan perusteella määrittämään pinta-aloja ja tilavuuksia jotka olivat aiemmin olleet tavoittamattomissa. On hyvinkin mahdollista, että jotkut Arkhimedeen tieteellisistä saavutuksista eivät ole säilyneet nykypäivään asti, mutta säilyneidenkin töiden perusteella Arkhimedes oli selvästi antiikin ajan merkittävin ja yksi kaikkien aikojen merkittävimmistä matematiikan ja tekniikan kehittäjistä.

Vaikka Arkhimedes olikin todellinen uranuurtaja, on matematiikka hänekin aikojensa jälkeen kehittynyt huomattavasti. Arkhimedeen tapa laskea integraaleja oli varsin työläs ja parempi menetelmä saatiin vasta uudella ajalla differentiaalilaskennan myötä. Miksi Arkhimedes, liki kaksi vuosituhatta aikalaisiaan edellä oleva matemaatikko ei kehittänyt myös differentiaalilaskentaa, jota Newton ja Leibniz käyttivät aisaparina integraalilaskennalle? Newtonin ja Leibnizin löytämät kytkökset differentiaali- ja integraalilaskennan välillä nimittäin osoittautuivat historialliseksi läpimurrokseksi integraalilaskennan ja sitä myötä luonnontieteiden kehitykselle.

Vastaus jäänee ikuisiksi ajoiksi lähestulkoon spekulointia, mutta yksi tärkeä syy lienee, että Arkhimedeen kulttuuripiirissä matematiikka perustui hyvin suurelta osin geometristen käsitteiden varaan, ja täten negatiivisten suureiden käsite oli tuntematon. Differentiaalilaskenta edellyttää yhtä lailla negatiivisten kuin positiivistenkin suureiden hallintaa, ja ehkäpä tätä psykologista kynnystä ei edes Arkhimedeen kaltainen mestari kyennyt murtamaan.

Lisäksi on syytä huomauttaa, että differentiaalilaskentaa edelsi, ja voisi lähestulkoon sanoa edellytti, René Descartesin urauurtava algebraa ja geometriaa yhdistävä työ. Muita mainitsemisen arvoisia uuden ajan matematiikan pioneereja olivat Blaise Pascal ja Pierre Fermat. Integraali- ja differentiaalilaskenta yhdessä muodostavat matemaattisen koneiston, jolla voidaan hyvin tehokkaasti kuvata luonnontieteissä, erityisesti fysiikassa esiintyviä ilmiöitä. Jos tämän koneiston oleellimmat piirteet pitäisi esittää erittäin tiiviisti, voisi sanoa että integraalilaskenta sallii suureen käsittelemisen pistemäisissä osissa ja näiden osien yhdistämisen, kun taas differentiaalilaskenta sallii suureen ja sen muutoksen samanaikaisen käsittelyn.

Kokonaisuutena differentiaali- ja integraalilaskenta muodostui 1600-luvun jälkipuoliskolla Newtonin ja Leibnizin töiden myötä. Newtonin motivaatio uudenlaisen matematiikan kehittämiseen lähti tarpeesta kuvailla reaalimaailman ilmiöitä kuten taivaanmekaniikkaa ja esittää täsmällisesti mekaniikassa tärkeää käsitettä *suureen muutosnopeus*. Leibniz ei teoriaansa muodostaessaan korostanut fysikaalista lähtökohtaa. Leibnizin käyttämiä merkintöjä pidetään yleisesti selkeämpinä kuin Newtonin, mutta myös Newtonin merkintöjä käytetään edelleen jossain määrin fysiikassa.

Huolimatta erilaisista filosofisista lähtökohdista Newtonin ja Leibnizin työt johtivat samanlaisiin matemaattisiin käsitteisiin ja näiden myötä samanlaiseen teoriaan. Jälkikäteen arvioiden voidaan todeta, että kummankaan versio differentiaali- ja integraalilaskennasta ei täytä nykypäivän vaatimuksia loogisesti aukottomasta matemaattisesta teoriasta. Tämä johtuu siitä, että 1600-luvun lopulla *reaaliluvun* käsite ei ollut nykyisellä tavalla jäsentynyt – koko asiaa ei ollut ollut tarpeen pohtia antiikin aikojen jälkeen. Newtonin ja Leibnizin aikoina puhuttiin ”äärettömän pienistä” suureista, ns. *infinitesimaaleista*, joiden avulla perusteltiin sekä differentiaali- että integraalilaskennan tuloksia. Tällä

lähestymistavalla saavutettiin merkittäviä tuloksia, mutta sen looginen hataruus havaittiin jo varhain: Reaalilukujen joukossa ei ole infinitesimaaleja, joihin Newtonin ja Leibnizin aikainen differentiaali- ja integraalilaskenta perustuu. Newton ja Leibniz siis perustivat työnsä käsitteille, joista ei edes senaikuisen tietämyksen mukaan voitu puhua täsmällisesti. Loogisesti tyydyttävä teoria differentiaali- ja integraalilaskennasta saatiin vasta 1800-luvulla Cauchyn ja Weierstrassin töiden myötä.

On kuitenkin korostettava, että Newtonin ja Leibnizin ja heidän aikalaistensa tapa lähestyä differentiaali- ja integraalilaskentaa infinitesimaalien avulla on melko intuitiivinen ja helposti ymmärrettävä. Lisäksi infinitesimaaleja käyttävän lähestymistavan kautta on saatu merkittäviä tuloksia, jotka on myöhemmin voitu täsmällisemmän lähestymistavan puitteissa osoittaa oikeiksi. Siksi on mahdollista ajatella, että epätäsmällisen, infinitesimaaleihin tukeutuvan idean takana olisi jokin loogisesti täsmällinen lähestymistapa ja tällainen löydettiinkin 1960-luvulla. Luomalla ns. *epästandardin analyysin* Abraham Robinson osoitti, miten infinitesimaaleja voidaan käsitellä loogisesti tyydyttävällä tavalla. Robinsonin tekniikka vaatii kuitenkin huomattavasti vankemman matemaattisen pohjan kuin Weierstrassin 1800-lukulainen ε - δ -tekniikka, eikä Robinsonin lähestymistapaa siksi käytetä yleensä. Myös tämän kurssin käsitteet esitetään Weierstrassin tavalla.

Logiikan näkökulmasta katsoen differentiaalilaskennan kehittämiseksi tarvitsee määritellä ainoastaan yksi uusi käsite, nimittäin raja-arvo. Myös integraalilaskenta sellaisessa muodossa kuin tätä kurssikokonaisuutta varten tarvitaan, olisi mahdollista rakentaa tämän raja-arvokäsitteen päälle, mutta integraalien ominaisuuksia on helpompi ymmärtää kun käytetään hieman toisenlaista raja-arvokäsitettä.

4.2 Raja-arvo

Jos reaalifunktio f on määritelty jollakin välillä $[a, b]$ pistettä $x_0 \in [a, b]$ lukuunottamatta, voidaan kuitenkin tarkastella miten f :n arvot käyttäytyvät luvun x_0 lähellä. Jos $f(x)$ käyttäytyy siten, että sen arvot ”tarkkenevat” kohti lukua y kun x ”tarkkenee” kohti lukua x_0 , sanotaan, että f :llä on raja-arvo y pisteessä x_0 .

Differentiaalilaskenta voidaan varsin yksiselitteisesti rakentaa raja-arvon käsitteen pohjalle. Käsitteen raja-arvo nykyaikaisena perustana puolestaan toimii reaalilukujen ja -funktioiden etäisyyksien arviointi. Monia arviointien perustana toimii *kolmioepäyhtälö*, kts. Määritelmä 8.

Ennen seuraavaa määritelmää muistutetaan, että $\mathbb{R}$:n alkioita (reaalilukuja), kutsutaan myös *pisteiksi*. Myös useampiulotteisten rakenteiden (vektoriavaruuksien) $\mathbb{R}^n$ alkioita kutsutaan pisteiksi; nimityksen taustalla on geometrinen esitys. Usein myös minkä hyvänsä joukon alkioita kutsutaan pisteeksi analogiaan nojautuen.

Määritelmä 29. Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ avoin ympäristö on avoin väli (a, b) , joka sisältää pisteen x_0 .

Ellei toisin mainita, pisteen ympäristöllä tarkoitetaan aina avointa ympäristöä. Intuitiivisesti annettun reaalifunktion $f(x)$ *raja-arvolla* (limes) pisteessä x_0 tarkoitetaan sellaista lukua y , jota funktion $f(x)$ arvo lähestyy, kun x lähestyy lukua x_0 .

Tämä voidaan tarkemmin ilmaista siten, että $d(f(x), y)$ tulee pieneksi, kunhan x valitaan siten, että $d(x, x_0)$ on pieni. Lisäksi on voitava ilmaista se, että $d(f(x), y)$ voidaan saada *miten pieneksi tahansa* (esim. pienemmäksi kuin mikä hyvänsä ennalta annettu $\varepsilon > 0$), kunhan $d(x, x_0)$ on riittävän pieni (pienempi kuin δ_ε) ja tämä puolestaan johtaa seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 30 (Raja-arvo). Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 avoimessa ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \rightarrow d(f(x), y) < \varepsilon).$$

ja sanotaan, että reaalifunktion f *raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ voidaan merkitä myös $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y$.

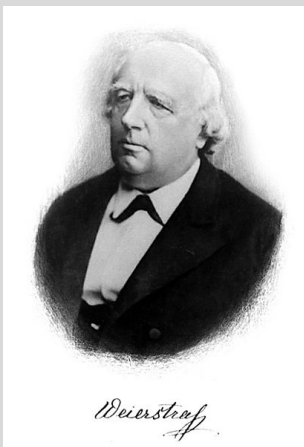
Taustatietoa



Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) oli ranskalainen matemaatikko, joka saavutti merkittäviä tuloksia muun muassa kompleksifunktioiden integraalilaskennan alalla. Cauchy aloitti analyysin modernisoinnin esittämällä erikoistapauksissa nykyisen kaltaisen raja-arvon määritelmän.

(kuva: Wikimedia Commons)

Taustatietoa



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Weierstraß) (1815–1897) oli saksalainen matemaatikko, joka modernisoi differentiaali- ja integraalilaskennan nykyiseen asuunsa. Muun muassa nykyisin käytetyt eksaktit raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan käsitteet ovat häneltä peräisin. Ennen Weierstrassin töitä mainitut käsitteet oli yleisesti perustettu enemmän intuitiiviselle pohjalle.

(kuva: Wikimedia Commons)

Raja-arvon määritelmä merkitsee siis sitä, että reaalifunktion f raja-arvo pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$, jos valitsemalla x riittävän pienestä x_0 :n ympäristöstä (niin pienestä että $d(x, x_0) < \delta$) funktion f arvo saadaan miten pieneen pisteen y ympäristöön tahansa (siis $d(f(x), y)$ pienemmäksi kuin mikä hyvänsä positiiviluku ε).

Jos halutaan funktion f arvo aina vain y :n pienempään ympäristöön, on yleensä x valittava aina vain pienemmästä x_0 :n ympäristöstä, mikä merkitsee siis sitä, että luku $\delta = \delta_\varepsilon$ yleensä riippuu luvusta ε . Sen lisäksi on huomattava, että δ riippuu yleensä myös pisteestä x_0 .

Huomautus 23. Raja-arvon määritelmässä x toteuttaa ehdon $0 < d(x, x_0) < \delta$. Tällöin siis aina $d(x, x_0) \neq 0$, joten $x \neq x_0$. Tästä seuraa, että *raja-arvo* $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ *ei riipu arvosta* $f(x_0)$, vaan arvoista $f(x)$, missä $x \neq x_0$ on pisteen x_0 ympäristössä. On myös huomioitava, että raja-arvoa pisteessä x_0 ei voida määritellä laisinkaan, ellei f on määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä (x_0 mahdollisesti poislukien).

Huomautus 24. Koska $f(x)$ ei voi samanaikaisesti olla mielivaltaisen lähellä kahta eri lukua y_1 ja y_2 , on raja-arvo (mikäli olemassa) välttämättä yksikäsitteinen. Muodollisesti päättely voidaan tehdä vaikkapa seuraavasti: Tehdään vasta oletus, jonka mukaan funktiolla f on pisteessä x_0 kaksi eri raja-arvoa y_1 ja y_2 . Merkitään $\varepsilon = \frac{1}{2}d(y_1, y_2) > 0$. Koska y_1 on raja-arvo, on $d(f(x), y_1) < \varepsilon$, kunhan $d(x, x_0) < \delta_\varepsilon$. Samanaikaisesti myös $d(f(x), y_2) < \varepsilon$. Tämä ei kuitenkaan voi pitää paikkansa, sillä tällöin olisi kolmioepäyhtälön mukaan

$$\varepsilon = \frac{1}{2}d(y_1, y_2) \leq \frac{1}{2}(d(y_1, f(x)) + d(f(x), y_2)) < \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) = \varepsilon,$$

mikä on ristiriita ($\varepsilon < \varepsilon$).

Esimerkki 23. $\lim_{x \rightarrow 2}(3x + 1) = 7$, mikä voidaan muodollisesti todistaa oikeaksi seuraavasti:

$$d(3x + 1, 7) = |3x + 1 - 7| = |3x - 6| = 3|x - 2| = 3d(x, 2).$$

Tällöin siis etäisyys $d(3x + 1, 7)$ saadaan pienemmäksi kuin ε , kun x valitaan niin läheltä 2:sta, että $d(x, 2)$ on pienempi kuin $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Esimerkki 24. Funktio $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ on määritelty kaikkialla muualla paitsi pisteessä $x = 1$. raja-arvo pisteessä $x = 1$ on 3, mikä nähdään oikeaksi seuraavalla laskelmalla: Koska $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$, voidaan tapauksessa $x \neq 1$ supistaa, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} d(f(x), 3) &= \left| \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3 \right| = \left| \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x - 1} - 3 \right| \\ &= |2x + 1 - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1| = 2d(x, 1) < \varepsilon, \end{aligned}$$

kun $d(x, 1) < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$. Toisin sanoen, arvo $f(x)$ saadaan miten lähelle kolmesta tahansa, kun x valitaan riittävän läheltä lukua 1 (ei kuitenkaan valita $x = 1$).

Esimerkki 25. $\lim_{x \rightarrow 3}(x^2 - 2x + 2) = 5$. Tämä voidaan osoittaa oikeaksi seuraavasti:

$$d(x^2 - 2x + 2, 5) = |x^2 - 2x + 2 - 5| = |x^2 - 2x - 3| = |(x + 1)(x - 3)| = |x + 1|d(x, 3).$$

Jos x on valittu niin läheltä lukua 3, että $d(x, 3) < 1$, on tällöin $|x + 1| = |x - 3 + 4| \leq |x - 3| + |4| < 5$ ja siis

$$d(x^2 - 2x + 2, 5) < 5d(x, 3).$$

Tällöin siis $d(x^2 - 2x + 2, 5) < \varepsilon$, kunhan $d(x, 3) < \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\} = \delta$.

Esimerkki 26. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x + 4}{x - 3} = -\frac{9}{4}$, mikä osoitetaan oikeaksi seuraavasti:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{3x^2 - 2x + 4}{x - 3}, -\frac{9}{4}\right) &= \left| \frac{3x^2 - 2x + 4}{x - 3} - \left(-\frac{9}{4}\right) \right| = \left| \frac{12x^2 + x - 11}{4(x - 3)} \right| = \left| \frac{(x + 1)(12x - 11)}{4(x - 3)} \right| \\ &= \frac{|12x - 11|}{4|x - 3|}d(x, -1). \end{aligned}$$

Jos nyt x on valittu niin läheltä lukua -1 , että $|x + 1| = d(x, -1) < 1$, on $|12x - 11| = |12x + 12 - 23| \leq |12x + 12| + |-23| = 12|x + 1| + 23 < 12 + 23 = 35$ ja $|x - 3| = |-4 + x + 1| \geq |-4| - |x + 1| > 4 - 1 = 3$. Tällöin

$$d\left(\frac{3x^2 - 2x + 4}{x - 3}, -\frac{9}{4}\right) < \frac{35}{4 \cdot 3}d(x, -1) = \frac{35}{12}d(x, -1)$$

ja siis $d\left(\frac{3x^2 - 2x + 4}{x - 3}, -\frac{9}{4}\right) < \varepsilon$, kun $d(x, -1) < \min\{\frac{12}{35}\varepsilon, 1\} = \delta$.

Huomautus 25. Raja-arvon määritelmä ei yleensä sovellu raja-arvon y löytämiseen, ainoastaan sen todistamiseen, että löydetty luku y on etsitty raja-arvo. Esimerkeissä 23, 24, 25 ja 26

raja-arvot on löydetty käyttämällä mielekkään tuntuista päättelyä: ” x :n ollessa lähellä lukua -1 on lauseke $\frac{3x^2-2x+4}{x-3}$ lähellä lukua $\frac{3 \cdot (-1)^2 - 2(-1) + 4}{-1-3} = -\frac{9}{4}$. Tämän päättelyn oikeellisuus perustellaan myöhemmin lauseessa 14.

Esimerkki 27. Funktio $f(x) = \frac{1}{x-2}$ on määritelty kaikkialla muualla paitsi pisteessä $x = 2$. Tässä pisteessä funktiolla ei kuitenkaan ole raja-arvoa, mikä nähdään seuraavasti: Tehdään vastaoletus, jonka mukaan $M = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ olisi olemassa. Tällöin $\left| \frac{1}{x-2} - M \right|$ pitäisi saada pienemmäksi kuin mikä hyvänsä positiiviluku, kunhan x valitaan riittävän läheltä lukua 2. Erityisesti $\left| \frac{1}{x-2} - M \right| < 1$, kun $|x-2|$ on kyllin pieni, sanotaan $|x-2| \leq \delta_1$ ja siksi $\left| \frac{1}{x-2} - M \right| < 1$, kun $|x-2| < \min\{\delta_1, \frac{1}{1+|M|}\}$

Kolmioepäyhtälöä ja vastaoletusta käyttämällä

$$\left| \frac{1}{x-2} \right| - |M| \leq \left| \frac{1}{x-2} - M \right| < 1,$$

mistä seuraa, että $\left| \frac{1}{x-2} \right| < 1 + |M|$, kun $|x-2|$ on kyllin pieni. Mutta edellisestä epäyhtälöstä seuraa $|x-2| > \frac{1}{1+|M|}$, mikä on ristiriidassa epäyhtälön $|x-2| < \min\{\delta_1, \frac{1}{1+|M|}\}$ kanssa. Tästä päätellään että vastaoletus on väärä eikä raja-arvoa M ole olemassa.

Osa edellisen esimerkin kaltaisista tapauksista kuuluu seuraavan määritelmän piiriin:

Määritelmä 31. Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta_M)(0 < d(x, x_0) < \delta_M \rightarrow f(x) > M).$$

Tällöin sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön*.

Raja-arvo $-\infty$ määritellään samoin kuin yllä, vaihtamalla epäyhtälö $f(x) > M$ epäyhtälöksi $f(x) < -M$. Tällöin merkitään

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Vapaammin ilmaistuna funktion raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön, jos valitsemalla x riittävän läheltä pistettä x_0 saadaan funktion f arvo kuinka suureksi hyvänsä. Jätetään harjoitustehtäväksi raja-arvojen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

sekä vastaavien symbolien $-\infty$ sisältävien raja-arvojen määrittely.

Huomautus 26. Symbolit ∞ ja $-\infty$ eivät vastaa mitään reaalilukua, vaan niitä käytetään ainoastan apumerkintöinä puhuttaessa ”äärettömistä” raja-arvoista, jotka on täsmällisesti määritelty yllä. Erityisesti ei voida määritellä sellaisia summia, tuloja tai osamääriä, joissa symboli ∞ tai $-\infty$ esiintyy.

Esimerkki 28. Funktio $f(x) = \frac{1}{x^2}$ on määritelty aina kun $x \neq 0$. Sillä on pisteessä $x = 0$ raja-arvo ∞ , koska $\frac{1}{x^2} > M$ kun $x^2 < \frac{1}{M}$, mikä toteutuu aina, kun $d(x, 0) = |x-0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Toisin sanoen, $f(x) > M$, kun x valitaan niin läheltä nollaa, että $d(x, 0) < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_M$.

Esimerkin 27 tapauksessa ei funktiolla pisteessä $x = 2$ kuitenkaan ole ääretöntäkään raja-arvoa, mikä johtuu siitä, että tapauksessa $x > 2$ lauseke $\frac{1}{x-2}$ on positiivinen, kun taas tapauksessa $x < 2$ lauseke $\frac{1}{x-2}$ on negatiivinen. Kummassakin tapauksessa lauseke voi itseisarvoltaan olla kuitenkin miten suuri tahansa.

Määritelmä 32. Olkoon reaalifunktio f määritelty jollakin avoimella välillä (x_0, b) .

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = y \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)((0 < d(x, x_0) < \delta) \wedge (x > x_0) \rightarrow d(f(x), y) < \varepsilon).$$

Tällöin sanotaan, että funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Tätä merkitään myös symbolilla $f(x_0+)$

Oikeanpuoleisen raja-arvon määritelmä poikkeaa siis raja-arvon määritelmästä vain siinä, että pisteen x_0 ympäristössä tarkastellaan vain sellaisia funktion $f(x)$ arvoja, joissa x sijaitsee x_0 :sta katsoen oikealle, siis $x > x_0$. Analogisesti määritellään *vasemmanpuoleinen raja-arvo* $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = y$ ja merkitään $f(x_0-)$. Oikean- ja vasemmanpuoleiset äärettömät raja-arvot määritellään ilmeisellä tavalla.

Esimerkki 29. Osoitetaan, että $f(x) = \frac{1}{x-2}$ oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä $x = 2$ on ∞ ja että vasemmanpuoleinen raja-arvo samassa pisteessä on $-\infty$. Valitaan tätä varten positiiviluku M . Oikeanpuoleisen raja-arvon määrittämistä varten tarkastellaan lukuja $x > 2$, jolloin $x - 2 = |x - 2|$. Tällöin epäyhtälö $\frac{1}{x-2} > M$ pätee tarkalleen silloin, kun

$$x - 2 = |x - 2| = d(x, 2) < \frac{1}{M},$$

joten raja-arvon määritelmässä esiintyvaksi luvuksi voidaan valita $\delta_M = \frac{1}{M}$. Näin ollen $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

Vasemmanpuoleista raja-arvoa oikeaksi osoittaessa on näytettävä toteen, että lausekkeen $\frac{1}{x-2}$ arvo voidaan saada pienemmäksi kuin mikä hyvänsä luku $-M$, missä M on kuinka suuri positiiviluku hyvänsä, kunhan x valitaan riittävän läheltä lukua 2, siten, että $x < 2$. Oletetaan siis, että $x < 2$, jolloin $d(x, 2) = |x - 2| = 2 - x$ ja epäyhtälö $\frac{1}{x-2} < -M$ on yhtäpitävä epäyhtälön $-(x - 2) < \frac{1}{M}$ kanssa, mikä puolestaan voidaan kirjoittaa muotoon $d(x, 2) < \frac{1}{M}$. Lauseke $\frac{1}{x-2}$ tulee siis pienemmäksi kuin $-M$, jos $x < 2$ valitaan siten, että $d(x, 2) < \frac{1}{M}$.

Tarkastellaan seuraavaksi raja-arvojen laskusääntöjä.

Määritelmä 33. Funktio f on rajoitettu joukossa I jos on olemassa sellainen positiiviluku M , että $|f(x)| \leq M$ aina, kun $x \in I$.

Lause 12. Jos funktiolla f on äärellinen raja-arvo A pisteessä x_0 , siis $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, niin silloin funktio f on rajoitettu jossakin pisteen x_0 ympäristössä.

Todistus. Raja-arvon määritelmän mukaan $d(f(x), A)$ saadaan miten pieneksi tahansa, kunhan x valitaan riittävän läheltä x_0 :aa. Erityisesti etäisyys $d(f(x), A) < 1$, kun $d(x, x_0) < \delta_1$. Jos siis $d(x, x_0) < \delta_1$, on

$$|f(x) - A| = d(f(x), A) \leq 1.$$

Kolmioepäyhtälön mukaan $|f(x)| - |A| \leq |f(x) - A|$, joten siis

$$|f(x)| - |A| \leq |f(x) - A| < 1,$$

kunhan $d(x, x_0) < \delta_1$. Näin ollen

$$|f(x)| < |A| + 1$$

kun x_0 on x :n sellaisessa ympäristössä, että $d(x, x_0) < \delta_1$. $\square$

Lause 13. Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, on olemassa sellainen x_0 :n ympäristö I , että $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ aina kun $x \in I$.

Todistus. Raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x) - A| < \frac{A}{2}$ aina, kun $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Nyt väli $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ voidaan valita kysytyksi ympäristöksi, sillä

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow -\frac{A}{2} < f(x) - A < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{A}{2}.$$

□

Lause 14. Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ja $c \in \mathbb{R}$. Seuraavat raja-arvojen laskusäännöt pätevät:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB$.
5. Jos $B \neq 0$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
6. Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ ja $\lim_{x \rightarrow y} g(x) = z$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = z$.

Todistetaan näistä esimerkin vuoksi 4 ja jätetään loput harjoitustehtäviksi.

Todistus.

$$\begin{aligned} d(f(x)g(x), AB) &= |f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x) - Bf(x) + Bf(x) - AB| \\ &\leq |f(x)g(x) - Bf(x)| + |Bf(x) - AB| = |f(x)| |g(x) - B| + |B| |f(x) - A| \\ &= |f(x)| d(g(x), B) + |B| d(f(x), A). \end{aligned}$$

Koska $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, tulee $d(f(x), A)$ miten pieneksi tahansa, kunhan x valitaan kyllin läheltä x_0 :aa, erityisesti $d(f(x), A) < \frac{\varepsilon}{2|B|}$ kun $d(x, x_0) < \delta_{\varepsilon, B}$, joten jälkimmäinen yhteenlaskettava saadaan miten pieneksi hyvänsä valitsemalla x riittävän läheltä x_0 :aa. Edellisen lauseen mukaan $|f(x)| < |A| + 1$, kunhan $d(x, x_0) < \delta_1$.

Koska $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, tulee $d(g(x), B)$ miten pieneksi tahansa, kunhan x valitaan kyllin läheltä x_0 :aa, erityisesti $d(g(x), B) < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$ kun $d(x, x_0) < \delta_{\varepsilon, A}$. Jos siis $d(x, x_0) < \delta = \min\{\delta_{\varepsilon, B}, \delta_1, \delta_{\varepsilon, A}\}$, niin

$$\begin{aligned} d(f(x)g(x), AB) &\leq |f(x)| d(g(x), B) + |B| d(f(x), A) \\ &< (|A| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)} + |B| \frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Edellinen lause perustelee sen, että rationaalifunktioiden raja-arvo on sama kuin funktion arvo sellaisissa pisteissä, missä nimittäjä ei tule nolllaksi. Äärettömien raja-arvojen kohdalla ei välttämättä saada yleisiä laskusääntöjä.

Esimerkki 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, mutta raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ei ole olemassa, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} x^3 = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Esimerkki 31. Selvitetään lausekkeen $\frac{\sin x}{x}$ käyttäytyminen, kun x lähestyy nollaa. Kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on geometrisen kuvion (piirrä) perusteella $\frac{1}{2} \sin x \cos x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$, mistä $\frac{1}{2} \sin x$:llä jakamalla saadaan $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ ja edelleen $\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$. Aiemmin on todettu että kosini on kutistava funktio, siis $d(\cos x, 1) \leq d(x, 0)$. Käyttämällä lisäksi Lauseetta 14 voidaan päätellä että

$$\frac{\sin x}{x} \text{ lähestyy lukua } 1 \text{ kun } x \text{ lähestyy nollaa}$$

Käsittelemättä jäivät vielä arvot $x < 0$, mutta koska $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, nämä eivät muuta edellistä johtopäätöstä.

Matlabiin on ohjelmoitu työkaluja myös raja-arvojen määrittämiseen. Tällöin tulee huolehtia siitä, että symbolisen laskennan paketti on asennettu ja että tarvittavat symbolit määritellään *syms*-komennolla

```
>> syms x
>> limit(sin(x)/x, x, 0)
```

```
ans =
```

```
1
```

limit-komennossa ensimmäinen paikka on varattu funktiolle, toinen muuttujalle joka lähestyy kolmannessa paikassa ilmaistua arvoa. Raja-arvot äärettömyydessä ja toispuoleiset raja-arvot lasketaan seuraavien esimerkkien mukaan.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x} :$$

```
>> limit(x^100/exp(x), x, inf)
```

```
ans =
```

```
0
```

```
>>
```

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} :$$

```
>> limit(1/(x-2), x, 2, 'left')
```

```
ans =
```

```
-inf
```

```
>>
```

4.3 Jatkuvuus

Määritelmän mukaan funktion raja-arvo pisteessä x_0 ei riipu millään tavoin funktion arvosta tässä pisteessä, vaan määräytyy funktion arvoista pisteen x_0 ympäristössä. Aiemmin kuitenkin jo nähtiin, että esimerkiksi rationaalifunktioiden raja-arvo on sama kuin funktion arvo tarkastelupisteessä, mikäli funktio on kyseisessä pisteessä määritelty. Yleisesti funktiota sanotaan *jatkuvaksi* pisteessä x_0 , mikäli sen raja-arvo yhtyy funktion arvoon.

Määritelmä 34. Olkoon reaalfunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä. f on *jatkuva* pisteessä x_0 , jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Raja-arvon määritelmän mukaan funktion jatkuvuus pisteessä x_0 voidaan kirjoittaa seuraavaan muotoon: Funktio f on jatkuva pisteessä x_0 , jos jokaista positiivilukua ε kohti on olemassa sellainen positiiviluku $\delta = \delta_\varepsilon$, että

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \text{ kun } d(x, x_0) < \delta.$$

Reaalifunktion jatkuvuus pisteessä x_0 pitää siis sisällään seuraavat asiat: 1) funktion tulee olla määritelty pisteessä x_0 ja jossakin sen ympäristössä ja 2) funktiolla tulee olla raja-arvo pisteessä x_0 ja 3) raja-arvon pisteessä x_0 tulee yhtyä funktion arvoon tässä pisteessä. Näin ollen jatkuvuus pisteessä x_0 merkitsee intuitiivisesti ajatellen sitä, että arvo $f(x)$ tulee miten lähelle tahansa arvoa $f(x_0)$, kun vain x valitaan kyllin läheltä x_0 :aa.

Esimerkki 32. Määritellään reaalifunktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{jos } x \neq 2 \\ 0, & \text{jos } x = 2. \end{cases}$$

Näin määriteltynä f on koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty reaalifunktio, mutta kuten esimerkissä 27 nähtiin, ei funktiolla f ole raja-arvoa pisteessä $x = 2$. Täten funktio f ei myöskään voi olla jatkuva pisteessä $x = 2$, eikä tilanne muutu miksiäkään, vaikka f määriteltäisiin toisin pisteessä $x = 2$.

Esimerkki 33. Palataan esimerkin 24 funktioon ja laajennetaan sen määritelmää asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{jos } x \neq 1 \\ 3, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

Näin saatu funktio on jatkuva pisteessä $x = 1$, sillä $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$. Itse asiassa sama funktio olisi saatu määrittelemällä $f(x) = 2x + 1$, mistä voidaan todeta että f on jatkuva kaikissa muissakin pisteissä.

Määritelmä 35. Funktio f on jatkuva välillä I , jos f on jatkuva jokaisessa I :n pisteessä.

Esimerkki 34. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ määritelty seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

Funktio f ei ole jatkuva missään pisteessä x_0 , sillä jos $x_0 \in \mathbb{Q}$, on $f(x_0) = 1$ ja $d(f(x_0), f(x)) = 1$ aina, kun $x \notin \mathbb{Q}$, ja tällaisia pisteitä x löytyy miten läheltä pistettä x_0 hyvänsä. Siis edes $d(f(x_0), f(x)) < 1$ ei voi toteutua, vaikka $d(x_0, x)$ olisi miten pieni hyvänsä. Samoin todetaan, että f ei voi olla jatkuva missään pisteessä $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Tunnetusti esimerkiksi polynomifunktiot ovat jatkuvia koko $\mathbb{R}$:ssä. Jatkuvista funktioista saadaan uusia jatkuvia funktioita esimerkiksi rationaalisin operaatioin.

Lause 15. Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvia joukossa I . Tällöin myös $f \pm g$, ja fg ovat jatkuvia joukossa I ja $\frac{f}{g}$ on jatkuva joukossa $I \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$. Lisäksi $f \circ g$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

Todistus. Seuraa lauseesta 14. $\square$

Itse asiassa voimassa on myös huomattavasti laajempikin tulos (jonka todistus myös sivuutetaan).

Lause 16. Kaikki alkeisfunktiot (katso määritelmä insinöörimatematiikka A:sta) ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

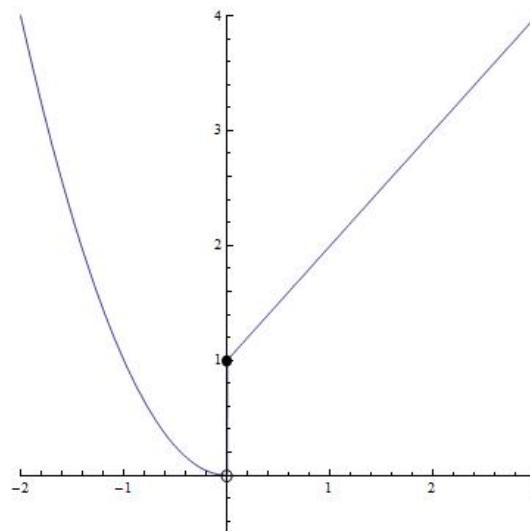
Analogisesti toispuoleisten raja-arvojen kanssa voidaan määritellä *toispuoleinen jatkuvuus*

Määritelmä 36. Olkoon f määritelty jollakin välillä $[x_0, b)$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f on oikealta jatkuva pisteessä x_0 .

Määritelmä 37. Olkoon f määritelty jollakin välillä $(a, x_0]$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f on vasemmalta jatkuva pisteessä x_0 .

Esimerkki 35. Määritellään f paloittain seuraavasti (kuva 9):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x < 0, \\ x + 1, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$



Kuva 4.1 $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$. Funktio f on siis pisteessä $x = 0$ oikealta jatkuva mutta vasemmalta epäjatkuva.

Tällöin $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$, joten funktio f on pisteessä $x = 0$ oikealta jatkuva mutta vasemmalta epäjatkuva.

Matlabissa voidaan itse määritellyt funktiot kirjoittaa ns. M-tiedostoiksi (valikoista file → new → M-file). Esimerkin 35 funktio (kutsutaan sitä nimellä *esim*) voidaan määritellä seuraavasti:

```
function y = esim(x)
% ESIM on paloittain määritelty funktio,
% lineaarinen, kun x>0 ja neliöllinen muutoin.
if (x>=0)
    y=x+1
else y=x^2
end;
```

Luku 5

Derivaatta

5.1 Derivaatan määritelmä

Differentiaalilaskennan peruskäsitteisiin kuuluva *derivaatta* voidaan saavuttaa monella tavalla, mutta kaikkein yleispätevin on näkemys, jonka mukaan derivaatta edustaa monimutkaisen, epälineaarisen suureen likimääräistystä eli *approksimaatiota* yksinkertaisemmän, lineaarisen avulla. Lineaarisuus tässä yhteydessä viittaa ensimmäisen asteen polynomifunktioon. Kun $k \in \mathbb{R}$ on vakio, on muotoa $T(h) = kh$ oleva lineaarinen funktio erittäin yksinkertainen reaalifunktio, ja derivaattakäsite voidaan perustaa tämänkaltaisiin (lokaaleihin) approksimaatioihin.

Approksimaatiota varten tulee kuitenkin selvittää joitakin yksityiskohtia. Ensinnäkin funktioille $T(h) = kh$ pätee aina $T(0) = 0$, mikä ei tietenkään päde kaikille reaalifunktioille. Lisäksi on selvää, että lineaarinen funktio ei voi approksimoida mitä hyvänsä f funktiota kaikkialla, vaan yleensä on tarpeen kiinnittää jokin tarkastelupiste x , jonka ympärillä funktiota approksimoidaan. Funktiota f tarkasteltaessa on tällöin hyödyllistä valita uusi muuttuja h , jonka suhteen piste x edustaa origoa, siis siirtyä tarkastelemaan pistettä $x + h$. Tämä merkitsee sitä, että funktion $x \mapsto f(x)$ sijaan tarkastellaan funktiota $h \mapsto f(x + h)$. Tästä tulee vielä siirtää pystysuoraa koordinaattia vastaava piste origoon, mikä merkitsee sitä, että tarkasteltavaksi tulee funktio $g(h) = f(x + h) - f(x)$, jolle $g(0) = 0$. Nyt g edustaa alkuperäistä funktiota, mutta uuden muuttujan ja lisäyksen $-f(x)$ ansiosta piste $(x, f(x))$ vastaa siirretyssä koordinaatistossa pistettä $(h, g(h)) = (0, 0)$, siis tarkastelu on siirretty origoon ja funktiolle g haetaan lineaarista approksimaatiota.

Esimerkki 36. Olkoon $f(x) = x^3$ ja tarkastellaan tätä funktiota pisteessä $(2, f(2)) = (2, 8)$. Siirros origoon merkitsee sitä, että f :n sijaan tarkastellaan funktiota $g(h) = f(2 + h) - f(2) = (2 + h)^3 - 2^3$.

Määritelmä 38. Pisteen x ympäristössä määritelty reaalifunktio f on *derivoituva* pisteessä x , mikäli on olemassa sellainen $k \in \mathbb{R}$ ja jossain nollan ympäristössä määritelty reaalifunktio $\varepsilon(h)$, että

$$f(x + h) - f(x) = k \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

ja funktiolle $\varepsilon(h)$ pätee $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$.

Esimerkki 37. Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$ pisteessä $x = 2$. Tällöin

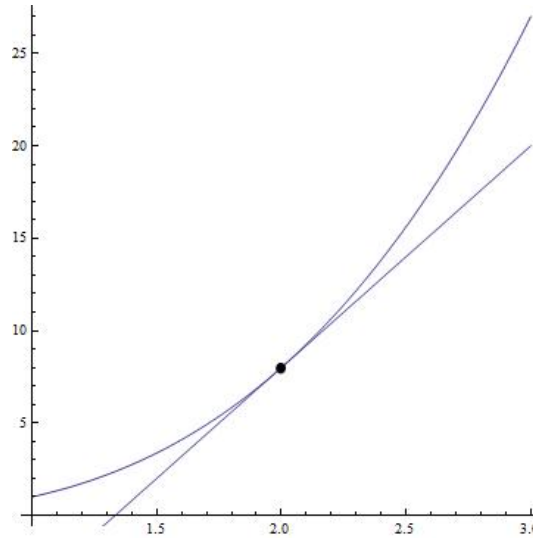
$$f(2 + h) - f(2) = (2 + h)^3 - 2^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 h + 3 \cdot 2 h^2 + h^3 - 2^3 = 12h + (6h + h^2)h.$$

Kun merkitään $\varepsilon(h) = 6h + h^2$, huomataan, että $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Tällöin funktio $T(h) = 12h$ on etsitty lineaarinen approksimaatio funktiolle $f(2 + h) - f(2)$, siis f on derivoituva pisteessä $x = 2$.

Esimerkki 38. Olkoon $f(x) = x^3$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= (x + h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 \\ &= 3x^2h + (3xh + h^2)h = 3x^2h + \varepsilon(h)h, \end{aligned}$$

missä on merkitty $\varepsilon(h) = 3xh + h^2$. Tällöin $\varepsilon(h)$ toteuttaa derivaatan määritelmän ehdot $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$, joten $f(x)$ on derivoituva pisteessä x , ja $f'(x) = 3x^2$.



Kuva 5.1 Funktion $f(x) = x^3$ lineaarinen approksimaatio pisteessä $x = 2$.

Huomautus 27. Edellisen määritelmän oikealla puolella esiintyvää funktiota $T(h) = kh$ sanotaan funktion $f(x+h) - f(x)$ *lineaariseksi approksimaatioksi* ja kyseessä on siis origon kautta kulkeva suora. Derivaatan käsittäminen lineaarisena approksimaationa avaa keinot derivaattakäsitteen yleistämiseen usean muuttujan funktioille.

Kun $h \neq 0$, voidaan kirjoittaa

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k + \varepsilon(h), \quad (5.1)$$

mistä saadaan välittömästi vaihtoehtoinen muoto derivaatan määritelmälle:

Lause 17. Pisteen x ympäristössä määritelty reaalifunktio f on derivoituva pisteessä x , mikäli on olemassa sellainen $k \in \mathbb{R}$, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k.$$

Huomautus 28. Määritelmä 38 ja Lause 17 ovat matemaattisesti yhtäpitävät ja johtavat täsmälleen samaan derivoituvuuden käsitteeseen. Lause 17 on usein käyttökelpoisempi derivaatan arvon laskemiseksi, mutta Määritelmä 38 on yleistyskelpoisempi, erityisesti kun ryhdytään tarkastelemaan usean muuttujan funktioita kurssikokonaisuuden myöhemmässä osassa.

Huomautus 29. Kun raja-arvo oletetaan tunnetuksi ja perusteiltaan hallituksi käsitteeksi, ei derivaatan käsite periaattessa vaadi mitään uutta perustavaa laatua olevaa matemaattista innovaatiota. Kyse on lähinnä tunnetun rakenteen jäsentelystä ja soveltamisesta. Näin ollen voidaan katsoa, että differentiaalilaskenta voidaan perustaa raja-arvon käsitteen varaan.

Huomautus 30. Derivaatan määritelmän k ja $\varepsilon(h)$ yleensä riippuvat pisteestä x .

Huomautus 31. Yhtälön 5.1 osamäärää kutsutaan *erotusosamääräksi*.

Määritelmä 39. Jos f on derivoituva pisteessä x , sanotaan määritelmän 38 lukua k funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$.

Huomautus 32. Derivaatan määritelmä saatiin tarkastelemalla funktion f mahdollisimman hyvää lineaarista approksimaatiota, joten on selvää, että $f'(x)$ on funktion kuvaajan pisteen $(x, f(x))$ kautta kulkevan sivuavan suoran eli *tangentin* kulmakerroin. Suoran $y = kx$ kulmakerroin k kuvaa suoran kasvunopeutta, joten

derivaattaa $f'(x)$ voidaan pitää funktion f kasvunopeutena pisteessä x .

Lause 18. Pisteessä x_0 derivoituva funktio on myös jatkuva pisteessä x_0 .

Todistus. Suoraan derivaatan määritelmästä seuraa kolmioepäyhtälöä käyttäen, että

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &= |f(x) - f(x_0)| = |k(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)| \\ &\leq |k| |x - x_0| + |\varepsilon(x - x_0)| |x - x_0| \\ &= (|k| + |\varepsilon(x - x_0)|) d(x, x_0). \end{aligned}$$

Koska $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$, on erityisesti $|\varepsilon(x - x_0)| \leq 1$, kun $d(x - x_0) = |x - x_0| \leq \delta_1$. Tällöin siis

$$d(f(x), f(x_0)) \leq (|k| + 1) d(x, x_0) \leq (|k| + 1) \frac{\varepsilon_2}{|k| + 1} = \varepsilon_2,$$

kun $d(x_0, x) \leq \min\{\frac{\varepsilon_2}{|k| + 1}, \delta_1\}$. $\square$

Määritelmä 40. Jos f on derivoituva (avoimen) välin I jokaisessa pisteessä, sanotaan, että f on derivoituva välillä I . Funktiota $x \mapsto f'(x)$ sanotaan f :n derivaattafunktioksi. Derivaattafunktiosta käytetään myös merkintää $Df(x)$, $D_x f(x)$, $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{df}{dx}$ ja mikäli merkitään $y = f(x)$, myös merkinnät $\frac{dy}{dx}$ ja y' ovat tavallisia. Jos tuntemattomia on useita ja ainoastaan x :n muutosta tarkastellaan, käytetään osittaisderivaattamerkintää $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Historialliselta kannalta Leibnitzin merkintä $\frac{dy}{dx}$ ansaitsee erityistä huomiota. Ennen differentiaalilaskennan modernisointia oli tapana ajatella, että dx merkitsee ”äärettömän” pientä (infinitesimaalista) lisäystä muuttujaan x ja dy puolestaan ”infinitesimaalista” muutosta funktion $y = f(x)$ arvossa. Täten $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$ ajateltiin puolestaan ”infinitesimaalien” osamääräksi. Nykyisessä (standardimuotoisessa) differentiaalilaskennassa merkintää $\frac{dy}{dx}$ ei tulkita osamääräksi, vaan kyseessä on vain derivaatan merkintätapa.

Esimerkki 39. Merkinnän $\frac{df}{dx}$ ja osittaisderivaattamerkinnän $\frac{\partial f}{\partial x}$ ero on siinä, että muuttujan riippuessa edelleen toisesta muuttujasta ei merkinnässä $\frac{\partial f}{\partial x}$ derivointia uloteta riipumattomaan muuttujaan. Jos esimerkiksi $f(x, y) = x^2 + y^2$ ja edelleen $y = 3x^2$, on $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, mutta $\frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{d}{dx} (x^2 + (3x^2)^2) = \frac{d}{dx} (x^2 + 9x^4) = 2x + 36x^3$.

Esimerkki 40. Olkoon $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ joukossa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ määritelty funktio. Tällöin

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x(x+h)},$$

kun $h \neq 0$. Lauseen 17 ja raja-arvon laskusääntöjen mukaan tällöin on

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

5.2 Derivointisääntöjä

Tarkalleen ottaen derivaatta merkitsee funktion derivaattaa jossakin pisteessä, mutta melko yleisesti derivaatafunktiota kutsutaan myös derivaataksi. *Derivointi* puolestaan merkitsee derivaatafunktion määrittämistä.

Derivointi suoraan määritelmään perustuen on varsin työlästä, ja siksi kannattaa johtaa derivointisääntöjä joiden avulla derivointi onnistuu systemaattisemmin. Näitä sääntöjä on koottu matematiikan taulukkokirjoihin.

Lause 19 (Vakiofunktion derivaatta). Jos funktio $f(x) = c$ on vakio välillä I , niin $f'(x) = 0$ välillä I .

Todistus. Lauseen 17 mukaan

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = 0. \square$$

Lause 20. Olkoot f ja g avoimella välillä I derivoituvia funktioita ja $a, b \in \mathbb{R}$. Silloin välillä I pätee

- $\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$
- $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Todistus. Perustuu suoraan derivaatan määritelmään tai lauseeseen 17 ja raja-arvon laskusääntöihin. Todistetaan esimerkiksi tulon derivointisääntö ja jätetään summaa koskeva sääntö harjoitustehtäväksi.

Suoralla laskulla nähdään, että

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}, \end{aligned}$$

mistä raja-arvon laskusäännöt antavat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \square$$

Lause 21 (Ketjusääntö). Olkoon $f(x)$ derivoituva välillä I ja $g(x)$ derivoituva välillä $f(I)$. Tällöin $g \circ f$ on derivoituva välillä I ja

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Todistus. Funktion f derivoituvuudesta seuraa, että $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\epsilon_f(h)$. Kun merkitään $h_1 = f'(x)h + h\epsilon_f(h)$, saadaan suoralla laskulla

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= g(f(x+h) - f(x) + f(x)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x) + f'(x)h + h\epsilon_f(h)) - g(f(x)) = g(f(x) + h_1) - g(f(x)) \\ &= g'(f(x))h_1 + h_1\epsilon_g(h_1) = g'(f(x))(f'(x)h + h\epsilon_f(h)) + h_1\epsilon_g(h_1) \\ &= g'(f(x))f'(x)h + hg'(f(x))\epsilon_f(h) + h_1\epsilon_g(h_1). \end{aligned}$$

Väite seuraa tästä suoraviivaisesti (harjoitustehtävä). $\square$

Huomautus 33. Jos merkitään $y = f(x)$ ja $z = g(y) = g(f(x))$, saadaan ketjusäännölle helposti muistettavissa oleva esitys

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Esimerkki 41. Funktio $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ on kuvausten $x \mapsto f(x)$ ja $x \mapsto \frac{1}{x}$ yhdiste, joten ketjusäännön ja esimerkin 40 perusteella

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2} f'(x),$$

mikäli $f(x) \neq 0$ tarkasteltavalla välillä.

Lause 22 (Osamäärän derivointi). Olkoot $f(x)$ ja $g(x)$ derivoituvia välillä I ja lisäksi $g(x) \neq 0$ tällä välillä. Tällöin

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Todistus. Tulon derivointisäännön ja esimerkin 41 mukaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} (f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x) \frac{d}{dx} g(x)^{-1} \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \left(-\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x) \right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

$\square$

Lause 23 (Potenssifunktion derivointi). Olkoon $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$\frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}.$$

Todistus. Jos $k = 0$, on kyseessä vakiofunktio $x^0 = 1$ ja väite pitää paikkansa Lauseen 19 perusteella. Jos $k > 0$, voidaan käyttää Newtonin binomikaavaa, jonka mukaan

$$\begin{aligned}
(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \dots + h^k - x^k \\
&= kx^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \dots + h^k \\
&= kx^{k-1}h + \underbrace{h \binom{k}{2}x^{k-2}h^1 + \dots + h^{k-1}}_{\varepsilon(h)}
\end{aligned}$$

Ylläolevasta lausekkeesta nähdään, että $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 = \varepsilon(0)$, joten derivaatan arvo on muuttujan h ensimmäisen asteen esiintymän kerroin kx^{k-1} .

Jos $k < 0$, on $-k > 0$ ja tarkasteltava funktio voidaan kirjoittaa muotoon $f(x) = (\frac{1}{x})^{-k}$. Loppu jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Lause 24 (Käänteisfunktion derivointi). Jos f on injektiivinen jossakin pisteen x ympäristössä I , derivoituva pisteessä x ja että $f'(x) \neq 0$. Tällöin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Todistus. Jätetään todistus funktion f^{-1} derivoituvuuden perustelemisen osalta vajaaksi ja osoitetaan vain että mainittu sääntö on voimassa. Koska $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ on injektio, on $f: I \rightarrow f(I)$ bijektio ja siis käänteisfunktio $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ on määritelty. Lisäksi pätee $f^{-1}(f(x)) = x$ aina, kun $x \in I$, joten yhdistetyn funktion derivointisääntöä soveltamalla saadaan

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1.$$

Väite seuraa tästä suoraan kun muistetaan, että $y = f(x)$. $\square$

Huomautus 34. Käänteisfunktion derivaatalle saadaan muistisääntö

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Trigonometristen funktioiden derivointisääntöjä varten tarkastellaan ensin lauseketta

$$\frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin x) = \frac{1}{h} \cdot 2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2} = \frac{\cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x.$$

Viimeisin raja-arvo perustuu kosinifunktion jatkuvuuteen sekä Esimerkkiin 31.

Muille trigonometrisille funktioille derivointisäännöt seuraavat suoraviivaisesti tästä, esimerkiksi käyttämällä identiteettiä $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Eksponenttifunktion derivointia varten taas pitää tarkastella lauseketta

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Eksponenttifunktion derivointisääntö seuraa siitä tosiseikasta, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1, \quad (5.2)$$

mutta tätä ei voida näyttää toteen tämän kurssin tiedoilla. Yhtälön 5.2 osoittaminen oikeaksi edellyttäisi itse asiassa eksaktia määritelmää luvulle e , eikä tämäkään yleensä olisi helpoin reitti eksponenttifunktion derivointisäännön oikeaksi todistamiseksi.

Seuraavia derivointisääntöjä ei siis tässä yhteydessä todisteta yksityiskohtaisesti:

- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$,
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$,
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

Logaritmin derivointisääntö

- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

puolestaan seuraa eksponenttifunktion ja käänteisfunktion derivointisäännöstä (harjoitustehtävä).

Huomautus 35. Potenssifunktion derivointisääntö $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ pätee vaikka α ei olisikaan kokonaisluku (harjoitustehtävä)

Esimerkki 42. Lasketaan

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Esimerkki 43. Määritetään

$$\frac{d}{dx} \arctan x.$$

Yhtälöstä

$$\arctan(\tan x) = x$$

saadaan puolittain derivoimalla

$$D \arctan(\tan x) \frac{d}{dx} (\tan x) = 1,$$

josta

$$D \arctan(\tan x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x}.$$

Merkitsemällä $y = \tan x$ nähdään, että

$$D \arctan y = \frac{1}{1 + y^2}.$$

5.3 Parametrimuodossa olevan ja implisiittifunktion derivointi

Reaalifunktio voidaan antaa myös parametrimuodossa $f = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$, missä $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ovat reaalifunktioita. Tämä merkitsee sitä, että $f(x(t)) = y(t)$ välillä I . Jos $x'(t)$ on nollasta eroava välillä I , saadaan yhdistetyn funktion derivointisäännön perusteella

$$f'(x(t))x'(t) = y'(t),$$

josta $x'(t)$:llä jakamalla saadaan

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Huomautus 36. Parametrimuotoisen funktion derivaatalle saadaan muistisääntö

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Esimerkki 44. Olkoon $f = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$ yksikköympyrän yläpuoliskon parametriesitys. Tällöin $f'(x) = \frac{\frac{d}{dt} \sin t}{\frac{d}{dt} \cos t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{1}{\tan t}$.

Huomautus 37. Ylläolevaan esimerkkiin liittyen voi olla valaisevaa selvittää lauseke $\tan t$:lle x :n avulla, kun tiedetään, että $x = \cos t$.

Tietyt säännöllisyys ehdot (ei käsitellä tässä yhteydessä) toteuttava kahden muuttujan funktio $F(x, y)$ määrittelee yhtälön $F(x, y) = 0$ kautta funktion: y voidaan ratkaista x :n avulla: $y = f(x)$ (vaikka varsinaista lauseketta ei aina saataisikaan). Kyse on tällöin implisiittisesti määritellystä funktiosta.

Yhtälön $F(x, y) = 0$ oikea puoli on vakiofunktio, joten sen derivaatta on nolla. Vasenta puolta derivoitaessa on otettava huomioon, että $y = f(x)$ ja käytettävä ketjusääntöä kun derivoidaan y :tä sisältäviä termejä.

Esimerkki 45 (Implisiittimuotoisen funktion derivointi). Yksikköympyrän yhtälö $x^2 + y^2 - 1 = 0$ määrittelee funktion $y = f(x)$ kun rajoitetaan $x \in [-1, 1]$ ja $y \geq 0$. Kirjoittamalla tämä muotoon $x^2 + (f(x))^2 - 1 = 0$ ja derivoimalla puolittain saadaan

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0,$$

mistä voidaan vielä ratkaista $f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$.

Esimerkki 46. Oletetaan tunnetuksi, että yhtälö

$$x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 3y^4 = 37$$

määrittelee derivoituvan funktion f jossakin pisteen $(1, 2)$ ympäristössä. Lasketaan $f'(1)$. Implisiittisellä derivoinnilla saadaan

$$3x^2 + 4xy + 2x^2y' - 4y^2 - 8xyy' + 12y^3y' = 0,$$

johon sijoittamalla $(x, y) = (1, 2)$ saadaan

$$3 + 8 + 2y' - 16 - 16y' + 96y' = 0 \Leftrightarrow -5 + 82y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{5}{82}.$$

5.4 Useampikertaiset derivaatat

Olkoon f jollakin välillä derivoituva reaalifunktio. Jos myös funktio f' on derivoituva jollakin välillä, voidaan tietysti puhua myös funktion f' derivaattafunktiosta. Tätä kutsutaan funktion f kaksinkertaiseksi derivaattafunktioksi ja merkitään $D^2f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Jos edelleen f'' on derivoituva, saadaan vastaavasti kolminkertainen derivaatta, jne. Funktion f n -kertaisesta derivaatasta käytetään merkintöjä $D_x^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ ja $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Kaksin- ja useampikertaiset osittaisderivaatat merkitään seuraavasti: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, tai $D_x^2 f$, $D_{yx} f$, $D_{xy} f$ ja $D_y^2 f$. Osittaisderivoinnin järjestys saattaa toisinaan vaikuttaa derivaatan arvoon. Täten voi olla, että $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Osoittautuu, että riittävän säännöllisille funktioille derivointijärjestys ei kuitenkaan vaikuta useampikertaisten osittaisderivaattojen arvoon.

Esimerkki 47. $D \sin x = \cos x$, $D^2 \sin x = -\sin x$, $D^3 \sin x = -\cos x$ ja $D^4 \sin x = \sin x$.

5.5 Antiderivaatta ja sen määrittäminen

Derivointisääntö $\frac{d}{dx}f(x) = g(x)$, joka esittää f :n derivaattafunktion voidaan lukea myös oikealta vasemmalle, jolloin se esittää g :n antiderivaatan.

Määritelmä 41. Funktio $F(x)$ on $f(x)$:n antiderivaatta, jos $F'(x) = f(x)$. Antiderivaattaa kutsutaan myös nimellä *kantafunktio*, *primitiivifunktio* ja *määräämätön integraali*.

Esimerkki 48. Jos $n \geq 1$, niin $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, mistä seuraa että $\frac{d}{dx}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = x^n$ aina, kun $n \geq 0$. Tällöin siis $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ on funktion x^n ($n \geq 0$) antiderivaatta.

Jos C on vakio, ja $F(x)$ on funktion $f(x)$ antiderivaatta, on $\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = f(x) + 0 = f(x)$, ja siis myös $F(x) + C$ on funktion $f(x)$ antiderivaatta. Näin ollen antiderivaatta ei ole yksikäsitteinen, vaan muita antiderivaattoja saadaan lisäämällä vakio johonkin antiderivaattaan. Myöhemmin nähdään, että *kaikki* tietyn funktion antiderivaatat saadaan lisäämällä vakio johonkin antiderivaattaan.

Funktion $f(x)$ antiderivaatoista käytetään merkintää

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

ja tässä merkinnässä funktiota f kutsutaan *integrandiksi*. Merkintää $\int f(x) dx$ kutsutaan myös funktion f *määräämättömäksi integraaliksi*, mutta sen suhteen tulee olla huolellinen, sillä se ei viittaa yhteen ainoaan funktioon $F(x)$, vaan joukkoon funktioita $F(x) + C$, missä C on mikä hyvänsä vakio.

Huomautus 38. Olkoon I jokin avoin reaalilukuväli. Välillä I jatkuvien reaalifunktioiden joukkoa merkitään symbolilla $C^0(I)$ ja $C^1(I)$ merkitsee niitä välillä I määriteltyjä reaalifunktioita, jotka ovat derivoituvia ja joiden derivaatta on jatkuva välillä I .

Tällöin derivointi määrittelee funktion $C^1(I) \rightarrow C^0(I)$, mutta antiderivaatta relaation $C^0(I) \rightarrow C^1(I)$, joka ei ole funktio.

Edellämainituista derivointisäännöistä saadaan helposti seuraavat säännöt, joita kutsutaan *integroitissäännöiksi*

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, jos $n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$

Lisää integroitissääntöjä löytyy matematiikan taulukkokirjoista.

Yleisesti ottaen antiderivaatan eli määräämättömän integraalin löytäminen on hankalampaa kuin derivaattafunktion löytäminen. Derivointisäännöistä seuraa kyllä suoraan muun muassa se, että

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

ja

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx. \quad (5.3)$$

Toisaalta taas ei ole mitään derivointisääntöä, josta suoraan seuraisi muoto esimerkiksi antiderivaatalle

$$\int f(x)g(x) dx.$$

Jos funktiosta ei nähdä suoraan, että se on jonkin toisen funktion derivaatta, on antiderivaatan löytämiseksi kuitenkin olemassa kaksi tekniikkaa, joita voidaan soveltaa.

Osittaisintegrointi perustuu tulon derivointisääntöön

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

josta seuraa, että funktion $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ eräs antiderivaatta on $f(x)g(x)$. Tämä toteamus voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = f(x)g(x),$$

mistä yhtälön (5.3) perusteella seuraa, että

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx. \quad (\text{osittaisintegrointi})$$

Esimerkki 49. Määritetään $\int \ln x dx$ ja tätä varten kirjoitetaan $g(x) = \ln x$, $f(x) = x$, jolloin $f'(x) = 1$ ja siis

$$\int \ln x dx = \int \ln x \frac{d}{dx} x = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln x - x + C.$$

Esimerkki 50. Määritetään $\int x \sin x dx$.

$$\int x \sin x dx = \int x \frac{d}{dx} (-\cos x) dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Esimerkki 51. Määritetään $\int x^2 e^x dx$.

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \int x^2 \frac{d}{dx} e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x \frac{d}{dx} e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C. \end{aligned}$$

On suositeltavaa tarkistaa antiderivaattojen määrittäminen derivaattoilla.

Sijoitus määräämättömään integraaliin perustuu yhdistetyn funktion derivointisääntöön: Merkitään $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$, jolloin

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = f(g(t))g'(t),$$

mistä saadaan antiderivaattaa koskeva sääntö

$$\int f(g(t))g'(t) dt = F(g(t)) + C. \quad (\text{sijoitus})$$

Antiderivaatta $\int f(x) dx$ voidaan siis laskea suorittamalla sijoitus $x = g(t)$, jolloin dx integraalissa korvataan $g'(t) dt$:llä. Tarkoituksena on tietysti valita sellainen sijoitus, että uusi integraali on helpommin laskettavissa kuin alkuperäinen. Lopuksi palataan alkuperäiseen muuttujaan x sijoituksella $t = g^{-1}(x)$. Kysymys siitä, miten sijoitettava funktio pitäisi valita ei ole mitenkään suoraviivainen ratkaistavaksi, eikä mitään yleispätevää sääntöä olekaan. Tärkeimmät sijoitustyypit on kuitenkin luettelut matematiikan laitoksen kaavakokoelmassa.

Jotta tarvittavat operaatiot olisi mahdollista suorittaa, tulee funktiolle g asettaa joitakin säännöllisyysvaatimuksia, kuten esimerkiksi että g on aidosti monotoninen ja $g'(t)$ jatkuva. Kuitenkaan näihin ehtoihin ei käytännössä tarvitse yleensä kiinnittää huomiota, sillä lopputuloksen voi tarvittaessa tarkistaa derivaattoilla.

Esimerkki 52. Määritetään $\int \frac{1}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$. Tehdään sijoitus $x = \sqrt{5} \sin t$, jolloin $\frac{dx}{dt} = \sqrt{5} \cos t$ ja määräämätön integraali saa muodon

$$\int \frac{1}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \frac{1}{5^{\frac{3}{2}} \cos^3 t} \sqrt{5} \cos t dt = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{5} \tan t + C.$$

Sijoittamalla tähän takaisin alkuperäinen muuttuja saadaan

$$\int \frac{1}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{5} \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + C.$$

5.6 Rationaalifunktion antiderivaatta

Palautetaan mieleen, että rationaalifunktiolla tarkoitetaan muotoa $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ olevaa funktiota, jossa $p(x)$ ja $q(x)$ ovat polynomeja. Antiderivaatan

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

määrittäminen derivointisääntöihin perustuen ei ole suoraviivaista, sillä tätä varten pitää löytää derivointisääntöjä, jotka tuottavat tulokseksi osamäärän. Tällaisia ovat mm.

- $\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)^n} = -\frac{nf'(x)}{f(x)^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}.$

Esimerkki 53. $\int \frac{4x+3}{(2x^2+3x-1)^2} dx = -\frac{1}{2x^2+3x-1} + C$

Esimerkki 54. Lasketaan $\int \frac{3x}{x^2+1} dx$. Tätä varten voidaan kirjoittaa

$$\frac{3x}{x^2+1} = \frac{3}{2} \frac{2x}{x^2+1},$$

joten

$$\int \frac{3x}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

Esimerkki 55. Lasketaan

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C & \text{jos } n \neq 1 \\ \ln(x-a) + C & \text{jos } n = 1 \end{cases}$$

Esimerkki 56. Lasketaan

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5} dx.$$

Nimittäjällä ei ole reaalisia nollakohtia, mutta neliöksi täydentämällä saadaan

$$x^2-2x+5 = x^2-2x+1+4 = (x-1)^2+4 = 4\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1\right).$$

Kun sijoitetaan $t = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow x = 2t+1$, saadaan integraalin arvoksi

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5} dx = \int \frac{1}{4(t^2+1)} \cdot 2 dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \arctan t + C = \frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + C.$$

Muita menetelmiä rationaalifunktion antiderivaatan etsimiseksi esitetään kurssin seuraavilla osilla tarpeen mukaan. Ne perustuvat pääsääntöisesti rationaalifunktion pilkkomiseksi sellaisiin osiin, joihin voidaan soveltaa ylläolevia periaatteita.

Luku 6

Differentiaalilaskennan sovelluksia

6.1 Differentiaalilaskennan väliarvolause

Merkittävä osa derivaattafunktion ja alkuperäisen funktion yhteyksistä voidaan johtaa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta, mikä puolestaan seuraa helposti ns. *Rollen lauseesta*

Lause 25 (Rollen lause). *Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b) . Jos $f(a) = f(b)$, niin välillä (a, b) on ainakin yksi sellainen piste ξ , jolle pätee $f'(\xi) = 0$.*

Todistus. Jos f on vakiofunktio, kelpaa mikä hyvänsä piste $\xi \in (a, b)$. Jos f ei ole vakio, saa f joko suurempia tai pienempiä (tai molempia) arvoja kuin $f(a) = f(b)$. Tarkastellaan tapausta, jossa f saa suurempia arvoja kuin $f(a)$ (toinen tapaus on samankaltainen ja sen tarkastelu sivuutetaan).

On mahdollista näyttää toteen, että jatkuvalla funktiolla f on suurin arvo M suljetulla välillä $[a, b]$, olkoon ξ jokin sellainen piste, jossa tämä suurin arvo saavutetaan, siis $f(\xi) = M$. Osoitetaan, että $f'(\xi) = 0$. Koska $f(\xi) = M$ on funktion suurin arvo, on $f(\xi + h) \leq f(\xi)$ aina, kun $|h|$ on niin pieni että $\xi + h \in [a, b]$. Tällaisille h :n arvoille siis pätee

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \begin{cases} \leq 0, & \text{kun } h > 0 \\ \geq 0, & \text{kun } h < 0. \end{cases}$$

Oletuksen mukaan f on derivoituva pisteessä ξ , mikä merkitsee sitä, että raja-arvo

$$f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

on olemassa. Yllä olevista arvioista ja lauseesta 13 seuraa, että raja-arvo $f'(\xi)$ ei voi olla positiivinen eikä negatiivinen, siis $f'(\xi) = 0$. $\square$

Seuraus 4. *Jos f on välillä $[a, b]$ jatkuva ja derivoituva välillä (a, b) ja $f(a) = f(b)$, niin f :n maksimi- tai minimikohdassa pätee $f'(\xi) = 0$.*

Seuraus 5 (Differentiaalilaskennan väliarvolause). *Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b) , niin tällöin on ainakin yksi piste $\xi \in (a, b)$, jossa $f'(\xi)(b - a) = f(b) - f(a)$.*

Todistus. Määritellään apufunktio $g(x) = f(x)(b - a) - (f(b) - f(a))x$ ja huomataan, että g täyttää Rollen lauseen ehdot. Tällöin on olemassa $\xi \in (a, b)$, jolle pätee $g'(\xi) = 0$, mikä voidaan kirjoittaa muotoon $f'(\xi)(b - a) - (f(b) - f(a)) = 0$. $\square$

Huomautus 39. Differentiaalilaskennan väliarvolause voidaan tulkita seuraavasti: Funktion f muutos välillä $[a, b]$ on $f(b) - f(a)$, ja tämä muutos saadaan välin pituudesta $b - a$ kerrottuna luvulla

$f'(\xi)$. Tällöin siis $f'(\xi)$ on funktion *keskimääräinen* muutosnopeus välillä $[a, b]$. Täten Väliarvolause ilmaisee sen ilmeisen seikan, että ainakin välin $[a, b]$ yhdessä pisteessä funktion kasvunopeus on keskimääräinen.

Seuraus 6 (Integraalilaskennan peruslause). Jos $f'(x) = 0$ jollakin välillä I , niin f on tällä välillä vakio.

Todistus. Jos $a \in I$ ja $a < x \in I$, niin väliarvolausesta käyttäen saadaan $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0$, siis $f(x) = f(a)$. $\square$

Seuraus 7. Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I , niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I (C on vakio).

Todistus. Oletuksen mukaan apufunktio $h(x) = f(x) - g(x)$ toteuttaa $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ välillä I , joten $h(x)$ on vakio, siis $f(x) = g(x) + C$ välillä I . $\square$

Huomautus 40. Jos $F(x)$ ja $G(x)$ ovat funktion f antiderivaattoja välillä I , niin $F'(x) = G'(x) = f(x)$ ja siis $G(x) = F(x) + C$ välillä I .

Seuraus 8. Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja $f'(x) \geq 0$ (vastaavasti $f'(x) \leq 0$) aina kun $x \in (a, b)$, niin f on kasvava (vastaavasti vähenevä) välillä $[a, b]$.

Edelleen, jos $f'(x) > 0$, (vastaavasti $f'(x) < 0$) kun $x \in (a, b)$, niin f on aidosti kasvava (vastaavasti vähenevä) välillä $[a, b]$.

Todistus. Jos $x_1 < x_2 \in [a, b]$, niin väliarvolauseen mukaan $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ jollekin pisteelle $\xi \in (a, b)$. Oletuksen mukaan $f'(\xi) \geq 0$, joten $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, siis $f(x_2) \geq f(x_1)$. Vähennemistä koskeva osa todistetaan samoin. $\square$

Seuraus 9 (Yleistetty väliarvolause). Olkoot f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia välillä (a, b) . Tällöin on sellainen piste $\xi \in (a, b)$, että

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus. Käytetään apufunktiota

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)),$$

joka oletusten mukaan on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b) . Suoralla laskulla havaitaan, että $h(a) = h(b)$, joten Rollen lauseen mukaan on sellainen piste ξ , että $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. $\square$

Huomautus 41. Valitsemalla $g(x) = x$ saadaan yleistetystä väliarvolauseesta tavallinen väliarvolause.

Differentiaalilaskennan tehtäviä voi suorittaa **Matlab**-ohjelmistossa symbolisen matematiikan työkalujen avulla. Tällöin tulee `syms`-komennolla luoda tarvittavat muuttujasymbolit.

Esimerkki:

```
>> syms x y
>> f=sin(x*y^2)
```

```
f =
```

```
sin(x*y^2)
```

```
>> diff(f,x)
```

```
ans =
```

```
cos(x*y^2)*y^2
```

```
>>
```

Antiderivaatan etsimistä varten puolestaan on toiminto `int`:

```
>> int(f,x)
```

```
ans =
```

```
-1/y^2*cos(x*y^2)
```

6.2 l'Hospitalin sääntö

l'Hospitalin sääntö soveltuu toisinaan osamäärän raja-arvon selvittämiseen.

Lause 26 (l'Hospitalin sääntö). Oletetaan, että $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ja että raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

on olemassa äärellisenä tai äärettömänä. Silloin

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistus. Määritellään funktioiden f ja g arvot pisteessä a uudelleen $f(a) = g(a) = 0$, jolloin siis f ja g tulevat jatkuvaksi pisteessä a . Yleistetyn väliarvolauseen mukaan

$$f'(\xi)(g(x) - g(a)) = g'(\xi)(f(x) - f(a)),$$

missä $\xi \in (a, x)$ (tai $\xi \in (x, a)$), mikäli x on valittu riittävän läheltä pistettä a . Tällöin myös yllä oleva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Jos $x \rightarrow a$, niin myös $\xi \rightarrow a$, koska $\xi \in (x, a)$ (tai $\xi \in (a, x)$), ja väite seuraa tästä välittömästi. $\square$

Taustatietoa



Guillaume de l'Hôpital (l'Hôpital) (1661–1704) oli ranskalainen matematiikan harrastaja. Markiisi de l'Hôpital ei kuitenkaan keksinyt nimeään kantavaa sääntöä, vaan julkaisi sen. Säännön keksi tietävästi kuuluisa sveitsiläinen matemaatikko Johann Bernoulli, joka toimi l'Hôpitalin opettajana.

(kuva: Wikimedia Commons)

Esimerkki 57. Määritetään $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$. Nyt $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$ ja $D_x \ln x = \frac{1}{x}$, $D_x(x^2 - 1) = 2x$, joten l'Hôpitalin sääntö antaa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Esimerkki 58. Lasketaan raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

l'Hôpitalin sääntö antaa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$$

6.3 Käyrän tangentti

Derivaatan määritelmä perustuu siihen, että pisteessä x derivoituvan funktion f kuvaaja muistuttaa lokaalisti suoraa sitä enemmän mitä pienemmässä pisteen $(x, f(x))$ ympäristössä kuvaajaa tarkastellaan;

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h.$$

Jos merkitään $x = x_0 + h$, saadaan

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

ja suoraa, $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, jota funktion f kuvaaja siis lokaalisti muistuttaa, nimitetään käyrän $y = f(x)$ *tangentiksi* pisteessä $(x_0, f(x_0))$.

Esimerkki 59. Selvitetään yksikköympyrälle $x^2 + y^2 = 1$ pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ liittyvän tangentin yhtälö.

Relaation $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ lähtö- ja maalijoukkoa sopivasti rajoittamalla (esim. $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$) saadaan funktio $y = f(x)$, jonka implisiittimuotoa $x^2 + f(x)^2 = 1$ derivoimalla saadaan $2x + 2f(x)f'(x) = 0$, ja edelleen sijoittamalla $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ saadaan $2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} f'(\frac{1}{2}) = 0$. Tästä yhtälöstä ratkeaa $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ liittyvän tangentin yhtälö on siis $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sen sijaan yksikköympyrän määräävää relaatiota $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ei voida rajoittaa avoimilla väleillä I ja J sillä tavoin, että $1 \in I$, $0 \in J$ ja $D = \{(x, y) \in I \times J \mid x^2 + y^2 = 1\}$ olisi funktio. Tämä johtuu siitä, että jos pisteen 1 ympäristö on avoin, on siellä aina pisteitä $x_0 < 1$, joita kohti löytyy kaksi eri arvoa y_0 ja $-y_0$, joille kummallekin pätee $(x_0, y_0) \in D$ ja $(x_0, -y_0) \in D$.

Helposti huomataan kuitenkin, että lähtö- ja maalijoukkoja voidaan rajoittaa siten, että pisteen $(1, 0)$ ympäristössä voidaan x esittää y :n funktiona: $x = f(y)$. Tämä vastaa x :n ja y :n roolien vaihtamista keskenään. Tällöin implisiittimuodon $(f(y))^2 + y^2 = 1$ derivointi antaa $2f(y)f'(y) + 2y = 0$,

johon sijoittamalla $(x, y) = (1, 0)$ saadaan $2 \cdot 1 \cdot f'(0) + 2 \cdot 0 = 0$, josta ratkeaa $f'(0) = 0$. Pisteeseen $(1, 0)$ liittyvän tangentin yhtälö on siis $x = 0 \cdot (x - 1) + 1$, ts. $x = 1$.

6.4 Funktion kulun tutkiminen

Määritelmä 42. Piste x_0 on reaali funktion f *lokaali maksimi*, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 ympäristö I , että $f(x) \leq f(x_0)$ aina, kun $x \in I$. Vastaavasti määritellään lokaali minimi. Lokaaleja maksimeja ja minimejä kutsutaan yhteisellä nimellä *ääriarvopisteet*.

Rollen lauseen seurauksena (seuraus 4) saatiin, että ääriarvopisteessä x_0 on välttämättä $f'(x_0) = 0$. Täten siis ääriarvopisteet löytyvät derivaatan nollakohtien joukosta, mutta on huomattava, että kaikki derivaatan nollakohtapisteet eivät välttämättä ole ääriarvopisteitä.

Esimerkki 60. Funktiolle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ on $f'(x) = 3x^2$, joten derivaatan ainoa nollakohta on $x = 0$. Kyseinen piste ei kuitenkaan ole ääriarvopiste, sillä miten tahansa läheltä nollaa löytyy pisteitä $a > 0$ ja $-a < 0$, joille $f(a) = a^3 > 0$ ja $f(-a) = -a^3 < 0$.

Määritelmä 43. Jos $f'(x_0) = 0$, mutta x_0 ei ole funktion f ääriarvopiste, sanotaan, että x_0 on *satulapiste*.

Huomautus 42. Voidaan todistaa, että funktion $f(x)$ derivaatan nollakohta x_0 on lokaali maksimi, jos $f''(x_0) < 0$ ja lokaali minimi, jos $f''(x_0) > 0$.

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen seurauksena (seuraus 8) saatiin myös tulos, jonka mukaan ehdosta $f'(x) \geq 0$ (vastaavasti $f'(x) > 0$) välillä I seuraa, että funktio $f(x)$ on kasvava (vastaavasti aidosti kasvava) välillä I , ja toisaalta väheneyvyys sekä aito väheneyvyys seuraavat analogisista ehdoista.

Lisäksi ns. Bolzanon lauseesta¹ seuraa, että jos derivaatta $f'(x)$ on jatkuva funktio, ei se voi vaihtaa merkkiä tulematta välillä nolaksi. Edellä mainittuja tuloksia voidaan käyttää funktion kulun selvittämiseen.

Esimerkki 61. Olkoon $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + 5$ koko reaali lukujen joukossa määritelty funktio. $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 12x - 12 = 12(x^3 + x^2 - x - 1) = 12(x^2(x+1) - (x+1)) = 12(x^2 - 1)(x+1) = 12(x+1)^2(x-1)$. Koska derivaattafunktio on myös jatkuva ja sen nollakohdat ovat -1 ja 1 , ovat nämä ainoat mahdolliset pisteet, joissa funktion f kasvusuunta muuttuu. Helposti todetaan, että $f'(x) < 0$, kun $x < 1$ ja $f'(x) > 0$, kun $x > 1$, joten funktio f on vähenevä välillä $(-\infty, 1]$ ja kasvava välillä $[1, \infty)$. Lisäksi $x = -1$ on satulapiste.

6.5 Optimointitehtävät

Rollen lauseen seurauksen mukaan derivoituvan funktion lokaaleissa ääriarvokohdissa funktion derivaatta saa arvon nolla. Tämän perusteella voidaan ratkaista joitakin optimointitehtäviä, joissa pyritään löytämään jonkin suureen minimi- tai maksimiarvo annetulla välillä.

Derivaatan nollakohtiin perustuva menettely toimii, mikäli tarkasteltava suure voidaan esittää yhden muuttujan derivoituvana funktiona jollakin suljetulla välillä. Tällöin mahdolliset optimiarvot saavutetaan derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä. Täten tarkasteltavaksi jää yleensä äärellisen monta mahdollista pistettä, ja näitä vertaamalla voidaan optimointitehtävä ratkaista.

Esimerkki 62. Selvitetään, missä funktio $f(x) = x^2 - 5x + 2$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa. Todetaan, että $f'(x) = 2x - 5$, jolloin derivaatan ainoa nollakohta on $x = \frac{5}{2}$. Lisäksi todetaan, että $f''(x) = 2 > 0$, joten piste $x = \frac{5}{2}$ on minimipiste. Funktiolla f ei ole muita minimipisteitä, joten kyseinen piste on myös absoluuttinen (globaali) minimipiste. Maksimiarvoa funktiolla ei ole, vaan f saa miten suuria arvoja hyvänsä.

¹ Bolzanon lause: Jos jatkuva funktio saa erimerkkiset arvot suljetun välin päätepisteissä, on välillä funktion nollakohta

Esimerkki 63. Selvitetään, miten säilyketölkkin (sylinterin muotoinen) mittasuhteet tulee valita, jotta käytettävän materiaalin määrä (tölkkin pinta-ala) olisi mahdollisimman pieni kun tilavuudeksi halutaan jokin tietty kiinteä V . Olkoon tölkin pohjan säde r ja korkeus h . Tällöin tölkin pinta-ala koostuu pohjasta ja kannesta $2\pi r^2$ ja lieriön alasta $2\pi rh$. Kokonaispinta-ala on siis $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Tölkin tilavuus V sitä vastoin on pohjan ala kertaa korkeus $V = \pi r^2 h$. Tästä voidaan ratkaista $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Tällöin siis pinta-ala säteen funktiona on

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2,$$

missä ilmeisenä rajoitteena toimii ehto $r > 0$. Lisäksi on ilmeistä, että funktiolla $A(r)$ ei ole maksimia, vaan löydettävä ääriarvokohta on kysytty minimi. Derivointi antaa

$$A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r,$$

joten yhtälö $A'(r) = 0$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$4\pi r = \frac{2V}{r^2},$$

mikä on yhtäpitävää ehdon $r^3 = \frac{2V}{4\pi}$ kanssa. Tämä voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$r^3 = \frac{2\pi r^2 h}{4\pi} = \frac{1}{2} r^2 h,$$

mikä merkitsee sitä, että optimi löytyy arvolla $r = \frac{1}{2}h$.

6.6 Muutoksen arviointi

Huomautus 43. Jos halutaan korostaa nimenomaan, että kyseessä on muuttujan x muutos, käytetään merkinnän $x + h$ sijaan merkintää $x + \Delta x$, missä $\Delta x = h$ edustaa x :n muutosta.

Muuttujan vaihtuessa arvosta x arvoon $x + \Delta x$ vaihtuu myös funktion arvo $y = f(x)$:stä $f(x + \Delta x)$:ään. Yleensä merkitään $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, mikä vastaa hyvin merkintää $\Delta x = (x + \Delta x) - x$, mutta funktion arvon muutosta Δy saattaa olla vaikea esittää tarkasti Δx :n avulla.

Koska derivaatta on lähtökohtaisesti funktion lineaarinen approksimaatio

$$f(x + h) - f(x) \approx f'(x)h,$$

voidaan muutosta Δf sen sijaan approksimoida muutoksen Δx avulla: Sijoittamalla yllä $h = \Delta x$ saadaan

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

missä approksimaatio on sitä tarkempi mitä pienempi Δx on.

Esimerkki 64. Pallon sädettä kasvatetaan prosentti verran. Arvioidaan, kuinka paljon tällöin pallon tilavuus kasvaa. Koska r -säteisen pallon tilavuus on $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, saadaan $V'(r) = 4\pi r^2$ ja siis

$$\Delta V = V(r + \Delta r) - V(r) \approx V'(r)\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$$

ja siis tilavuuden prosentuaalisen kasvun likiarvo saadaan osamäärästä

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3 \frac{\Delta r}{r}.$$

Säteen kasvu prosentti verran merkitsee sitä, että $\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{100}$, jolloin siis tilavuuden prosentuaalinen kasvu on likimain $3 \cdot \frac{1}{100}$, siis noin kolmen prosentin luokkaa.

6.7 Yksinkertaiset differentiaaliyhtälöt

Yhden muuttujan *differentiaaliyhtälöllä* tarkoitetaan yhtälöä

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

missä F on jokin lauseke, joka sisältää termit x , y , y' , y'' , jne. ja y on x :n funktio. Jos $y^{(n)}$ on korkein derivaatta, joka differentiaaliyhtälössä esiintyy, niin silloin sanotaan, että differentiaaliyhtälö on *kertalukua* n .

Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen tarkoittaa funktion $y = f(x)$ etsimistä. Koska derivaatta merkitsee funktion kasvunopeutta tietyssä pisteessä, esiintyvät differentiaaliyhtälöt luonnontieteellisten käsitteiden mallintamisessa varsin usein.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen on kuitenkin varsin ongelmallista: mitään yleistä ratkaisumenetelmää ei ole olemassa. Tämä ei kuitenkaan merkitse sitä, etteikö joihinkin merkityksellisiin ongelmiin liittyviä differentiaaliyhtälöitä voisi ratkaista. Differentiaaliyhtälöitä käsitellään enemmän kurssilla Insinöörimatematiikka D, mutta jo tässä yhteydessä voidaan esittää joitakin yksinkertaisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmiä.

Esimerkki 65. Tapauksessa $f'(x) = g(x)$ differentiaaliyhtälön ratkaiseminen palautuu pelkäksi antiderivaatan eli määräämättömän integraalin etsimiseksi. Tällöin tulee siis etsiä funktio $G(x)$, joka toteuttaa ehdon $G'(x) = g(x)$, jolloin voidaan valita $f(x) = G(x) + C$, missä C on jokin vakio. Vakio C määräytyy *reunaehdosta*, joka kiinnittää arvot $f(x_0)$ ja $G(x_0)$: Tällöin $C = f(x_0) - G(x_0)$. Myös yleisempien differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen löytäminen edellyttää, että reunaehdot määräävät esiintyvät vakiot.

Esimerkki 66. Radioaktiivisen hiilen ^{14}C määrä N ajan kuluessa vähenee nopeudella, joka on verrannollinen ^{14}C :n määrään N . Tämä voidaan ilmaista differentiaaliyhtälöllä

$$N'(t) = -\lambda N(t),$$

missä λ on verrannollisuuskerroin. Yllä oleva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda.$$

Logaritmin derivointisääntöä käyttäen nähdään, että $\frac{d}{dt} \ln N(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}$, jolloin päädytään muotoon

$$\frac{d}{dt} \ln N(t) = -\lambda,$$

minkä ratkaiseminen on pelkkä integrointitehtävä, eli antiderivaatan määrittäminen: $\ln N(t) = -\lambda t + C$, missä C on jokin vakio. Tästä seuraa suoraan, että

$$N(t) = e^{-\lambda t + C} = e^C e^{-\lambda t},$$

ja vakio e^C määräytyy alkuehdosta $N(0) = N_0$, jolloin $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

6.8 Suoraviivainen tasaisesti kiihtyvä liike

Kuten aiemmin mainittiin, mekaniikan lainalaisuuksien kuvaaminen toimi Newtonin motivaationa differentiaali- ja integraalilaskennan kehittämiseksi. Tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaista ajan myötä muuttuvaa systeemiä, liikettä suoran suuntaisesti.

Ajatellaan, että kappaleen paikan suoralla ilmoittaa koordinaatti s , joka riippuu ajasta. Tällöin siis s voidaan esittää ajan funktiona $s(t)$. Jos funktio $s(t)$ on derivoituva, esittää derivaatta $s'(t)$ kappaleen *paikan muutosnopeutta*, jota yleensä kutsutaan pelkästään *nopeudeksi*. Tavanomaiseen tapaan merkitään $s'(t) = v(t)$, missä siis $v(t)$ tarkoittaa kappaleen nopeutta ajanhetkellä t . Jos edelleen $v(t)$ on derivoituva, esittää $v'(t)$ *nopeuden muutosnopeutta*, jota kutsutaan *kiihtyvyydeksi*, ja merkitään $v'(t) = a(t)$, joten siis $a(t) = s''(t)$.

Jos $a(t) = a$ on vakio, sanotaan, että kappale on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Koska $v'(t) = a$, on tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu

$$v(t) = at + v_0,$$

missä v_0 on jokin vakio. Edelleen on differentiaaliyhtälön $s'(t) = v(t)$ ratkaisu

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0,$$

missä s_0 on jokin vakio. Vakioita v_0 ja s_0 kutsutaan alkunopeudeksi ja alkumatkaksi. Suora sijoitus yllä oleviin kaavoihin antaa $s(0) = s_0$ ja $v(0) = v_0$, mitkä siis ilmaisevat kappaleen paikkakoordinaatin ja nopeuden ajanhetkellä $t = 0$.

Esimerkki 67. Maan pinnan läheisyydessä kaikkiin kappaleisiin vaikuttaa kiihtyvyyden $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$ aiheuttava gravitaatio eli painovoima. Jos pallo heitetään kahden metrin korkeudelta suoraan ylöspäin lähtönopeudella $10 \frac{m}{s}$, voidaan edellä johdettua liikeyhtälöä käyttäen määrittää, kuinka suuren korkeuden se saavuttaa ja milloin se osuu maan pinnalle.

Jos maan painovoiman aiheuttavan kiihtyvyyden suunta valitaan negatiivisen akselin suunnaksi ja maan pinta nollakohdaksi, on lähtönopeus tällöin $v_0 = 10 \frac{m}{s}$, lähtöpiste $s_0 = 2m$ ja kiihtyvyys g . Tällöin pallon nopeutta ajanhetkellä t esittää lauseke (yksiköt pois jättäen)

$$v(t) = -gt + 10$$

ja sen paikkaa lauseke (edellisen antiderivaatta)

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 10t + 2.$$

Pallo saavuttaa lakikorkeutensa silloin, kun $s'(t) = v(t) = 0$, siis ajanhetkellä $t = \frac{10}{g} \approx 1,02$ ja lakipisteen korkeus on tällöin $s(\frac{10}{g}) = \frac{50}{g} + 2 \approx 7,1$. Pallon maahantuloaika voidaan selvittää määrittämällä yhtälön $s(t) = 0$ positiivinen ratkaisu (likiarvo 2,22).

Tässä esimerkissä ei ole otettu huomioon ilmanvastusta, eikä sitä, että maan gravitaation aiheuttama kiihtyvyys pienenee maan pinnasta etäännyttäessä. Insinöörimatematiikka D:n differentiaaliyhtälöitä käsittelevässä osiossa esitetään menetelmiä, joiden avulla liikeyhtälöä saadaan tarkennettua mainittujen lisäehtojen mukaisesti.

6.9 Yhtälön likimääräinen ratkaiseminen

Esimerkki 68. Tee seuraava koe laskimella: aseta kulman yksiköksi radiaani ja lähtöarvoksi mikä tahansa reaaliluku. Laske tämän jälkeen kosini lähtöarvosta, sen jälkeen kosini tuloksesta, sitten kosini edellisestä, jne. Mitä useampia kertoja kosini lasketaan peräkkäin, sitä lähemmäksi tulos saadaan lukua

$$0,73908513321516064165531208767 \dots$$

Toistuvaa saman toimituksen suorittamista kutsutaan *iteroinniksi*. Edellisessä esimerkissä määritettiin yhtälön $x = \cos x$ ratkaisun likiarvo iteratiivisesti.

Jos f on tarkasteltavalla välillä jatkuva funktio, voidaan yhtälön $f(x) = 0$ nollakohdan likiarvo määrittää miten tarkasti hyvänsä, mikäli tunnetaan kaksi pistettä a ja b , joissa $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset. Tällöin nimittäin Bolzanon lauseen nojalla välillä (a, b) on funktion nollakohta, ja nollakohdan sijaintia voidaan rajoittaa *haarukointimenetelmällä* (binary search):

1. Asetetaan $i = 0$, $a_0 = a$ ja $b_0 = b$.
2. Jos $|a_i - b_i|$ on pienempi kuin haluttu tarkkuus, lopetetaan prosessi, a_i on haluttu nollakohdan likiarvo
3. Asetetaan $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ (päätepisteiden a_i ja b_i keskiarvo)

4. Jos $f(c_i) = 0$, on nollakohta löytynyt ja lopetetaan prosessi.
5. Jos $f(a_i)$ ja $f(c_i)$ ovat erimerkkiset, asetetaan $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = c_i$, kasvatetaan i :tä yhdellä ja palataan kohtaan 2.
6. Jos $f(c_i)$ ja $f(b_i)$ ovat erimerkkiset, asetetaan $a_{i+1} = c_i$, $b_{i+1} = b_i$, kasvatetaan i :tä yhdellä ja palataan kohtaan 2.

Haarukointimenetelmä soveltuu luonnollisestikin vain sellaisille funktioille f , joiden arvot tarvittavissa pisteissä voidaan laskea ja joille päätös ”onko $f(a) > 0$ ” voidaan tehdä. Näin on esimerkiksi silloin mikäli f on polynomifunktio.

Mikäli derivoituvan funktion nollakohdalle pätee $f'(\xi) \neq 0$, voidaan riittävän tarkkaa nollakohdan likiarvoa tarkentaa myös *Newtonin menetelmällä*, joka perustuu siihen, että nollakohdan lähellä olevaan pisteeseen x_0 piirretty tangentti leikkaa x -akselin lähempänä nollakohtaa kuin x_0 . Mainittu leikkauspiste voidaan määrittää geometrisesti tai seuraavalaisen idean perusteella: Jos $f(x_0) \neq 0$, pyritään etsimään sellainen h , että $f(x_0 + h) = 0$. Käyttämällä derivaatan määritelmää päädytään approksimaatioon

$$0 = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h,$$

minkä vuoksi voidaan ajatella, että valinta $h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ tuottaisi lähempänä nollakohtaa olevan pisteen $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Likiaarvoa voidaan siis mahdollisesti tarkentaa asettamalla

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad (6.1)$$

ja yhtälön (6.1) toistuvaa soveltamista kutsutaan Newtonin menetelmäksi.

Tarkastellaan seuraavaksi, millä ehdoilla Newtonin menetelmä tuottaa hyviä likiarvoja f :n nollakohdista. Tätä varten siirrytään tarkastelemaan hieman yleisempää tilannetta.

Määritelmä 44. Ehdon $x_f = f(x_f)$ toteuttavaa pistettä x_f kutsutaan funktion f kiintopisteeksi.

Määritelmä 45. Jos on olemassa vakio $c \in (0, 1)$ ja väli I jolle pätee $f(I) \subseteq I$ ja $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ aina, kun $x, y \in I$, sanotaan, että f on *kutistava* funktio (kuvaus) välillä I .

Lause 27 (Kiintopistelause). Olkoon f kutistava kuvaus välillä $I = [a, b]$. Tällöin f :llä on kiintopiste $x_f \in I$ ja mikä hyvänsä ehdoilla $x_0 \in I$ ja $x_{i+1} = f(x_i)$ määritelty jono $x_0, x_1, x_2, \dots$ lähestyy kiintopistettä x_f .

Todistus. Koska

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| \leq c|x - y| < |x - y| = d(x, y),$$

on f jatkuva välillä I . Koska $f(I) \subseteq I$, on välttämättä $f(a) \geq a$ ja $f(b) \leq b$. Määritellään $g(x) = f(x) - x$. Näin ollen myös g on jatkuva välillä I . Nyt $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ ja $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$ ja siis funktiolla g on nollakohta x_f välillä I . Tällöin $0 = g(x_f) = f(x_f) - x_f$, joten x_f on funktion f kiintopiste.

Todistetaan, että

$$d(x_i, x_f) \leq c^i d(x_0, x_f),$$

mistä väite seuraa, sillä $c^i \rightarrow 0$ kun $i \rightarrow \infty$.

Oletuksen $f(I) \subseteq I$ mukaan kukin x_i kuuluu välille I ja

$$\begin{aligned}
d(x_i, x_f) &= d(f(x_{i-1}), f(x_f)) \leq c \cdot d(x_{i-1}, x_f) \\
&= c \cdot d(f(x_{i-2}), f(x_f)) \leq c \cdot c \cdot d(x_{i-2}, x_f) \\
&= c^2 d(f(x_{i-3}), f(x_f)) \leq c^2 \cdot c \cdot d(x_{i-3}, x_f) \\
&= c^3 d(f(x_{i-4}), f(x_f)) \leq c^3 \cdot c \cdot d(x_{i-4}, x_f) \\
&= \dots c^i \cdot d(x_0, x_f).
\end{aligned}$$

□

Huomautus 44. Toisinaan voidaan käyttää differentiaalilaskennan väliarvolauseetta kiintopistelauseen vakion c löytämiseksi. Jos nimittäin jollakin välillä I pätee $|f'(x)| \leq c < 1$, on välttämättä

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| \leq c|x - y|.$$

Jotta f olisi kutistava funktio välillä I , pitää vielä selvittää onko $f(I) \subseteq I$.

Edellinen lause selittää miksi kosinifunktion iteratiivinen laskeminen kuljettaa minkä hyvänsä lähtöpisteen lähelle pistettä $0,739085\dots$. Geometrisesti on selvää, että kosinifunktiolla on vain yksi kiintopiste $x_f \approx 0,739085\dots$. Ensimmäisen kosinin laskeminen tuo minkä hyvänsä lähtöpisteen välille $[-1, 1]$, ja toisen välille $[\cos 1, 1]$ (liikarvo $\cos 1 \approx 0,5403$) ja voidaan helposti todeta, että tällä välillä kosinin derivaatta $-\sin x$ toteuttaa epäyhtälön $-\sin x \leq \sin 1 \approx 0,8414 < 1$.

Olipa x siis mikä hyvänsä reaaliluku, on $\cos \cos x$ välillä $I = [\cos 1, 1]$, jossa edellisen lauseen oletukset toteutuvat. Tästä eteenpäin kosinin iteratiivinen laskeminen johtaa lauseen mukaan lukujonoon, joka lähestyy kiintopistettä.

Newtonin iteraatiomenetelmässä iteroitava funktio on muotoa

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

jonka derivaatta voidaan määrittää helposti, mikäli f on kahdesti derivoituva tarkasteluvälillä:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Täten siis Newtonin iteraatiomenetelmä tuottaa nollakohtaa lähestyvän jonon, mikäli tarkasteluvälillä

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq c < 1$$

jollekin positiiviselle vakiolle c . Melko helposti voidaan osoittaa, että polynomifunktioille tällainen tarkasteluväli löytyy aina, mikäli funktion derivaatta nollassa ei ole nolla.

Yhtälön $F(x) = 0$ ratkaisua voidaan toisinaan pyrkiä approksimoimaan kirjoittamalla, mikäli mahdollista, yhtälö muotoon $x = F_1(x)$ ja etsimällä likiarvoa funktion F_1 kiintopisteelle.

Esimerkki 69. Etsitään likiarvo funktion $f(x) = \ln(1+x) - x + 1$ nollakohdalle. Havaitaan aluksi, että $f(2) = \ln 3 - 1 > 0$ ja $f(3) = \ln 4 - 2 < 0$, joten välillä $(2, 3)$ on olemassa nollakohta. $f(x) = 0$ voidaan kirjoittaa muodossa $x = \ln(1+x) + 1$, joten funktion $g(x) = \ln(1+x) + 1$ kiintopiste vastaa funktion $f(x)$ nollakohtaa. Nyt $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ ja tästä huomataan, että $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$ välillä $[2, 3]$. Tätten voidaan vaikkapa aloittaa pisteestä $x = 3$ ja soveltaa iteraatiota: $x_0 = 3$, $x_1 = g(x_0) \approx 2,38629$, $x_2 = g(x_1) \approx 2,21974$, $x_3 = g(x_2) \approx 2,1693$, $x_4 = g(x_3) \approx 2,15351$, $x_5 = g(x_4) \approx 2,14852$, $x_6 = g(x_5) \approx 2,14693$ jne.

Matlabin `x = fzero(fun, x0)` etsii funktion `fun` nollakohtaa annetun luvun `x0` lähistöltä.

Esimerkki:

```
>> x=fzero(@sin,1)
```

```
x =
1.5485e-024

>>
```

Omat funktiot kirjoitetaan Matlabissa ns. M-tiedostoiksi (file → new → M-file).

Esimerkki 1:

```
function y = esim(x)
% ESIM on paloittain määritelty funktio,
% lineaarinen, kun x>0 ja neliöllinen muutoin.
if (x>0)
    y=x+1
else y=x^2
end;
```

Esimerkki 2:

```
function y = esim2(x)
% esim2 on funktio cos x-x
y=cos(x)-x
```

Tämän jälkeen funktion esim2 nollakohdat voidaan määrittää fzero-toiminnolla

```
>> fzero(@esim2,0)
```

```
...
```

```
ans =
0.7391
```

```
>>
```

Polynomin nollakohtia määrittää myös roots-toiminto. Esimerkiksi polynomin $x^5 - 3x + 1$ nollakohdille saadaan likiarvot seuraavasti:

```
>> roots([1,0,0,0,-3,1])
```

```
ans =
-1.3888
-0.0803 + 1.3284i
-0.0803 - 1.3284i
1.2146
0.3347
```

```
>>
```


Luku 7

Taylorin polynomit

7.1 Korkeamman asteen approksimaatiot

Derivaatan käsitteeseen päädytään arvioimalla muutosta $f(x+h) - f(x)$ lineaarisella funktiolla $h \mapsto f'(x)h$. On luontevaa otaksua, että edellämainittua muutosta arvioiden toisen, kolmannen, tai korkeamman asteen polynomilla voitaisiin saada parempia approksimaatioita kuin lineaarisella funktiolla. Voidaankin siis kysyä, onko mahdollista arvioida muutosta $f(x+h) - f(x)$ h :n polynomina:

$$g(h) = f(x+h) - f(x) = c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \dots, \quad (7.1)$$

ja jos voidaan, mitkä ovat luvut $c_1, c_2, c_3, \dots$? Symmetrian vuoksi yleensä siirretään $f(x)$ toiselle puolelle, merkitään $c_0 = f(x)$ ja $g(h) = f(x+h)$. Tällöin kysymys on siitä, mitkä ovat luvut $c_1, c_2, c_3, \dots$ esityksessä

$$g(h) = f(x+h) = c_0 + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \dots \quad (7.2)$$

Mikäli oletetaan tämänkaltaisen esityksen olemassaolo (ja viimeisen yhteenlaskettavan, ns. jäänöstermin riittävä säännöllisyys), ei kertoimien löytäminen ole erityisen ongelmallista: Jos otaksutaan, että derivoimalla yhtälö (7.2) puolittain h :n suhteen saadaan

$$g'(h) = f'(x+h) = c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 + 4c_4h^3 + \dots, \quad (7.3)$$

löydetään sijoittamalla $h = 0$ $f'(x) = c_1$. Edelleen derivoimalla yhtälö (7.3) puolittain h :n suhteen saadaan

$$g''(h) = f''(x+h) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3h + 3 \cdot 4c_4h^2 + \dots, \quad (7.4)$$

ja sijoitus $h = 0$ osoittaa, että $f''(x) = 2c_2$. Edelleen derivoimalla ja sijoittamalla nähdään, että $f'''(x) = 3!c_3$, $f^{(4)}(x) = 4!c_4$, jne. Induktiolla saadaan lopulta $c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)$.

Taustatietoa



Brook Taylor (1685–1731) oli englantilainen matemaatikko, joka tarkasteli funktioiden arviointia polynomien avulla. Tämä Taylorin tärkein työ jäi kuitenkin vaille aikalaisten huomiota. Sen merkitys havaittiin vasta yli 40 vuotta Taylorin kuoleman jälkeen.

(kuva: Wikimedia Commons)

Edellä kuvailtu päättely voidaan tehdä tietenkin vain siinä tapauksessa, että funktio f on riittävän säännöllinen (tarvittavat säännöllisyys ehdot esitetään seuraavassa lauseessa). Edellä kuvailtu ajatuskulku johtaa kuitenkin helposti seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 46. Jos funktio f on n kertaa derivoituva jossakin pisteen x ympäristössä, määritellään funktion f pisteeseen x liittyvä n :n asteen *Taylorin polynomi* seuraavasti:

$$P_n(h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)h^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n.$$

Taylorin polynomi approksimoi funktion f muutosta $f(x+h)$, kun h on pieni, ts. $f(x+h) \approx P_n(h)$. Polynomia $P_n(h)$ kutsutaan funktion f *Taylorin approksimaatioksi* tai *Taylorin kehittämäksi* pisteessä x . Jos funktiolla on myös $n+1$:n kertaluvun derivaatta, voidaan virhetermiä arvioida seuraavan lauseen avulla.

Lause 28. Olkoon f jossakin pisteen x ympäristössä $n+1$ kertaa derivoituva funktio. Tällöin $f(x+h) = P_n(h) + E_n(h)$, missä

$$E_n(h) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1},$$

ja $\xi \in (x, x+h)$ (tai $\xi \in (x, x+h)$). Termiä $E_n(h)$ kutsutaan *Taylorin kehittämän virhetermiksi*. On huomattava, että $E_n(h)$ ei ole h :n polynomi, sillä se sisältää h :sta riippuvan luvun ξ .

Todistus. Esitetään myöhemmin integraalilaskennan yhteydessä. $\square$

Huomautus 45. Usein merkitään x :n sijasta x_0 ja h :n sijasta $x - x_0$, jolloin Taylorin kehittämä saa muodon

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + E_n(x), \quad (7.5)$$

missä $E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$ jollekin $\xi \in (x, x_0)$ (tai $\xi \in (x, x_0)$).

Sanotaan, että (7.5) on funktion f n :nnen kertaluvun *Taylorin kehittämä pisteessä* x_0 . Kehittämän polynomia sanotaan funktion f n :nnen asteen *Taylorin polynomiksi* tai *Taylorin approksimaatioksi* pisteessä x_0 . Jos $x_0 = 0$, saadaan

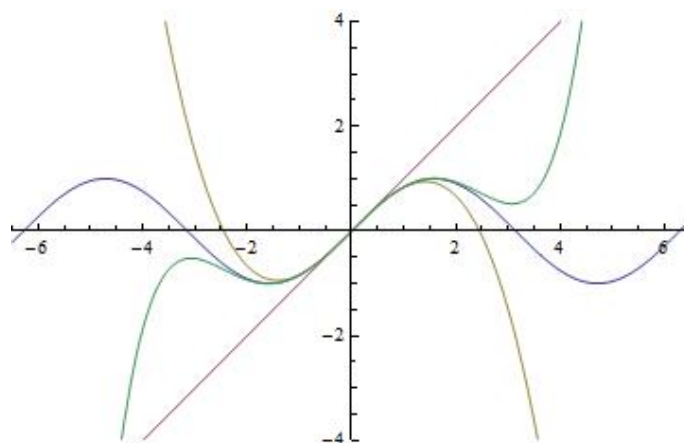
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + E_n(x), \quad (7.6)$$

missä $E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$ jollekin $\xi \in (0, x)$ (tai $\xi \in (x, 0)$). Yhtälön (7.6) kehittämä on siis Taylorin kehittämä pisteen $x_0 = 0$ suhteen ja sitä kutsutaan *Maclaurinin kehittämäksi*. Samoin kehittämässä esiintyvää polynomia kutsutaan *Maclaurinin polynomiksi*. Siihen voidaan viitata myös termillä *Maclaurinin approksimaatio*.

Esimerkki 70. $D_x \sin x = \cos x$, $D_x^2 \sin x = -\sin x$, $D_x^3 \sin x = -\cos x$, $D_x^4 \sin x = \sin x$, $D_x^5 \sin x = \cos x$, jne. Neljännen asteen Maclaurinin approksimaatio sinifunktiolle on siis

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 0 + \cos 0 \cdot x + \frac{1}{2}(-\sin 0)x^2 + \frac{1}{3!}(-\cos 0)x^3 + \frac{1}{4!}\sin 0 \cdot x^4 + E_4(x) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + E_4(x), \end{aligned} \quad (7.7)$$

missä $E_4(x) = \frac{\cos \xi}{120}x^5$ ja $\xi \in (0, x)$ (tai $\xi \in (x, 0)$). Täten esimerkiksi välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on $|E_4(x)| \leq \frac{|\cos \xi|}{120}(\frac{\pi}{2})^5 \leq \frac{1}{120}(\frac{\pi}{2})^5 \leq 0,08$.



Kuva 7.1 Sinifunktio ja sen Taylorin polynomit astetta 1, 3 ja 5.

Esimerkki 71. Olkoon $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ja selvitetään funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ toisen asteen Taylorin polynomi pisteessä $x = 0$. Ensinnäkin $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ ja $f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$. Koska $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$ ja $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, huomataan, että kysytty Taylorin polynomi on

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2.$$

Lisäksi virhetermi on muotoa $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}(1+\xi)^{\alpha-3}\xi^3$, missä $\xi \in (0, x)$. Jos esimerkiksi tarkastelu rajoitetaan välille $|x| \leq \frac{1}{100}$, on $1 + \xi < 1 + x \leq 1 + \frac{1}{100} = \frac{101}{100}$ ja virhetermi suuruudeltaan korkeintaan $\left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^{\alpha-3} \left(\frac{1}{100}\right)^3 \right|$. Esimerkiksi arvolla $\alpha = -\frac{1}{2}$ tämä on likimain $3.01804 \cdot 10^{-7}$. Näin ollen

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + E_2(x),$$

missä $|E_2(x)| \leq 3.01804 \cdot 10^{-7}$, mikäli $|x| \leq \frac{1}{100}$.

Esimerkki 72. Aiemmin mainittiin, että ääriarvon laatu voidaan selvittää toisen derivaatan merkkiä tarkastelemalla. Taylorin polynomien avulla tämä voidaan perustella seuraavasti: Oletetaan, että f on ainakin kahdesti derivoituva pisteessä x_0 , $f'(x_0) = 0$, ja että f'' on jatkuva x_0 :ssa. Tällöin

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

missä $\xi \in (x, x_0)$ tai $\xi \in (x_0, x)$. Jos $f''(x_0) > 0$, on jatkuvuuden perusteella myös $f''(\xi) > 0$, mikäli x on kyllin lähellä x_0 :aa. Tällöin siis $f(x) \geq f(x_0)$. Tapauksessa $f''(x_0) < 0$ huomataan, että $f(x) \leq f(x_0)$, jos x on riittävän lähellä x_0 :aa.

MacLaurinin polynomien määrittämiseksi voidaan **Matlab**-ohjelmistossa toimia seuraavasti:

```
>> syms x
>> taylor(sin(x), 7, x)
```

```
ans =
```

```
x-1/6*x^3+1/120*x^5
```

```
>>
```

Yllä annetussa komennossa 7 määrää ensimmäisen pois jätetyn termin asteen ja x muuttujan.

`taylor(f, n, x, a)` tuottaa funktion f pisteeseen a liittyvän Taylorin polynomin.

7.2 Ordo-merkintä

Taylorin polynomin kertoimien määrittämien korkeampien derivaattojen arvojen perusteella johtaa usein työläisiin derivointitehtäviin. Siksi Taylorin polynomit kannattaa käytännössä määrittää tunnettuja Taylorin polynomeja soveltamalla. Tässä luvussa esitellään tätä helpottava ordo-merkintä.

Määritelmä 47. Jos on olemassa positiivinen vakio K ja pisteen x_0 avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K |g(x)|,$$

niin tällöin merkitään $f(x) = O(g(x))$, kun $x \rightarrow x_0$ tai $f(x) = O(g(x), x_0)$ (luetaan ” $f(x)$ on ordo $g(x)$ x :n lähestyessä x_0 :aa”) Tapauksessa $x_0 = \infty$ pisteen ∞ avoin ympäristö tarkoittaa jotakin väliä (M, ∞) . Jos x_0 käy ilmi asiayhteydestä, voidaan se jättää merkitsemättä. Merkintä $f(x) = g(x) + O(h(x))$ tarkoittaa, että $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

Esimerkki 73. Esimerkissä 70 $E_4(x) = \frac{\cos \xi}{120} x^5$, joten $|E_4(x)| \leq \frac{1}{120} |x^5|$ (koko reaaliakselilla). Tällöin siis

$$\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5),$$

missä ei tarvitse merkitä näkyviin lisämäärettä $x \rightarrow x_0$, koska x_0 voidaan valita miten hyvänsä.

Esimerkin tulos yleistyy myös monille muille funktioille.

Lause 29. Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva ja $f^{(n+1)}$ on jatkuva jossakin pisteen x avoimessa ympäristössä, niin

$$f(x+h) = P_n(h) + O(h^{n+1}), \quad \text{kun } h \rightarrow 0,$$

missä $P_n(x)$ on määritelmän 46 mukainen n :nen asteen Taylorin polynomi.

Todistus. Lauseen 28 mukaan $E_n(h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) h^{n+1}$. Koska $f^{(n+1)}$ on jatkuva jossakin x :n ympäristössä $(x-a, x+a)$, on funktiolla $|f^{(n+1)}(x)|$ maksimi M suljetulla välillä $[x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2}]$. Tällä välillä siis

$$|E_n(h)| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi) h^{n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)!} M |h^{n+1}|.$$

□

Taylorin kehittelmästä ja lauseesta 29 saadaan helposti mm. seuraavat esitykset:

Seuraus 10. Kun $x \rightarrow x_0$, jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ pätee

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$,
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$,
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$,
4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$,
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$,
6. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$.

Kohdissa 1 ja 2 $x_0 \in (-1, 1)$, kohdissa 3, 4 ja 5 $x_0 \in \mathbb{R}$, ja kohdassa 6 $x_0 \in [-1, 1]$ ja $\tan^{-1}$ merkitsee funktion $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ käänteisfunktioita.

Ordomerkinän kanssa on noudatettava erityistä huolellisuutta, sillä merkinnässä $f(x) = O(g(x))$ kun $x \rightarrow x_0$ ei kyseessä ole varsinainen yhtäsuuruus, vaan merkinnällä ilmaistaan, että pisteen x_0 ympäristössä funktio $K|g(x)|$ rajoittaa funktiota $|f(x)|$. Täten $O(g(x), x_0)$ voidaan käsittää funktioiden joukoksi: siihen kuuluvat kaikki funktiot, jotka toteuttavat määritelmän 47 ehdot. Näin tulkittuna merkintä $f(x) = O(g(x))$ tarkoittaa, että $f(x)$ kuuluu joukkoon $O(g(x))$.

Ordomerkitä tarjoaa kuitenkin merkittäviä etuja raja-arvojen käsittelyssä, sillä potenssifunktioiden ordolausekkeilla laskeminen on suoraviivaista:

Lause 30. Olkoot m ja n ($n \leq m$) positiivisia reaalityyppisiä lukuja. Kun $x \rightarrow x_0$, on

1. $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^n)$, jos $|x_0| < 1$
2. $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$, jos $|x_0| > 1$
3. $cO(x) = O(x)$, kun $c \in \mathbb{R}$.
4. $x^n O(x^m) = O(x^{n+m})$.
5. $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.
6. $x^{-m}O(x^{n+m}) = O(x^n)$.
7. $f(x) = O(x^n) \Rightarrow f(x) = O(x^m)$, jos $|x_0| > 1$.
8. $\lim_{x \rightarrow x_0} O((x - x_0)^n) = 0$.

Todistus. Kaikki kohdat seuraavat ordolausekkeen määritelmästä melko suoraviivaisesti. Todistetaan esimerkiksi sääntö numero 4. Olkoon tätä varten $f(x)$ joukon $O(x^m)$ funktio, toisin sanoen, jossakin pisteen x_0 ympäristössä $|f(x)| \leq K|x^m|$. Tällöin myös $|x^n f(x)| \leq |x^n| K|x^m| = K|x^{n+m}|$ manitussa pisteen x_0 ympäristössä. $\square$

Edellisen lauseen mukaan Taylorin kehittelmästä siis seuraa esitys $f(x+h) = P_n(h) + O(h^{n+1})$, mutta myös käänteinen tulos pätee: jos astetta n oleva polynomi $Q(h)$ approksimoi funktion f muu-
tosta $f(x+h)$ riittävän tarkasti, on välttämättä $Q(h) = P_n(h)$.

Lause 31. Jos $Q(h)$ on astetta n oleva polynomi, f $n+1$ kertaa derivoituva ja $f(x+h) = Q(h) + O(h^{n+1})$, kun $h \rightarrow 0$, on $Q(h) = P_n(h)$, funktion f Taylorin polynomi pisteessä x .

Todistus. Sivuutetaan.

Huomautus 46. Vaihtamalla merkintöjä samoin kuin huomautuksessa 45, voidaan edellinen lause kirjoittaa seuraavassa muodossa: Jos $Q(x)$ on astetta $n+1$ oleva polynomi ja $f(x) = Q(x) + O((x - x_0)^{n+1})$ kun $x \rightarrow x_0$, niin silloin $Q(x)$ on funktion f astetta n oleva Taylorin polynomi pisteessä x_0 .

Lausetta 31 ja lauseen 30 sääntöjä käyttäen voidaan etsiä Taylorin kehitelmiä. Jos nimittäin löydetään jokin astetta n oleva polynomi, jolle pätee $f(x) = Q(x - x_0) + O((x - x_0)^{n+1})$, on $Q(x)$ välttämättä Taylorin kehitelmä pisteessä x_0 .

Esimerkki 74. Hyperbolinen kosini määritellään $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Etsitään sille astetta $2n$ oleva Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 0$. Ensinnäkin seurauksen 10 mukaan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$$

ja tähän sijoittamalla $-x$ saadaan

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2}).$$

Laskemalla nämä yhteen ja kakkosella jakamalla saadaan (ordotermien yhteenlaskusääntöjä käyttäen)

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}), \quad (7.8)$$

jolloin siis funktion $\cosh x$ astetta $2n$ (myös $2n+1$) oleva Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 0$ on yhtälön 7.8 oikealla puolella esiintyvä polynomi.

Esimerkki 75. Etsitään funktion $\ln x$ Taylorin polynomi $P_2(x)$ pisteessä $x_0 = 2$. Tämä voidaan tehdä kirjoittamalla

$$\ln x = \ln(2 + x - 2) = \ln\left(2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)$$

ja käyttämällä seurauksen 10 kohtaa 2, mistä saadaan

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + O((x-2)^3).$$

Lauseen 31 (katso huomautus 46) mukaan etsitty polynomi on siis

$$P_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2.$$

7.3 Raja-arvojen määrittäminen

Taylorin polynomit ja ordomerkintä muodostavat työkalun, joka soveltuu toisinaan raja-arvojen määrittämiseen l'Hospitalin sääntöä suoraviivaisemmin.

Esimerkki 76. Määritettävä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}.$$

Osoittaja ja nimittäjä lähenevät nollaa muuttujan lähetessä nollaa ja ovat derivoituvia kaikkialla. Tällöin l'Hospitalin säännön mukaan raja-arvo saadaan muotoon

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos(2x)}{2e^x - 2 - 2x}.$$

Edellinen raja-arvo täyttää jälleen l'Hospitalin säännön edellytykset, joten se saadaan muotoon

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 4 \sin(2x)}{2e^x - 2}.$$

Käytetään jälleen kerran l'Hospitalin sääntöä, jolloin raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x + 8 \cos(2x)}{2e^x} = \frac{6}{2} = 3.$$

Taylorin polynomien ja ordotermien avulla saadaan jossain määrin syvällisempi ymmärtämys siitä miksi saatuun raja-arvoon päädyttiin. Seurauksen 10 kohdasta 4 saadaan

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + O(x^5),$$

joten

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2} &= \frac{2(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)) - (2x - \frac{4}{3}x^3 + O(x^5))}{2(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)) - 2 - 2x - x^2} \\ &= \frac{x^3 + O(x^5)}{\frac{1}{3}x^3 + O(x^4)} = \frac{1 + O(x^2)}{\frac{1}{3} + O(x)}, \end{aligned}$$

mistä nähdään, että raja-arvo x :n lähetessä nollaa on 3.

Luku 8

Integraalit

Integraalin käsite on ollut tuttu jo Arkhimedeelle, joka on lähestynyt käsitettä nykyaikaiseen tapaan summien kautta. Newtonin ja Leibnizin aikalaisten näkökulmasta katsoen integraali on eräänlainen summa, jossa lasketaan yhteen ”äärettömän monta” ”äärettömän pientä” suuretta, ja saadaan tulokseksi äärellinen suure. Tämä historiallinen käsitys on sittemmin jouduttu täsmällisyyden saavuttamiseksi syrjäyttämään, mutta nykyinen täsmällisempikin integraalikäsite on edelleen perua summista. Tässä luvussa todetaan, miten integraali voidaan määritellä eräänlaisena summien raja-arvona, ja siksi integraaleilla onkin monia summien ominaisuuksia.

Erityisen huomionarvoista on, että lähtökohtaisesti integraalin käsitteellä ei ole mitään tekemistä derivaatan kanssa, vaan yhteys derivaattaan löytyy vasta analyysin peruslauseen myötä.

Tässä luvussa käsiteltävä integraalikäsite on perua Newtonilta ja Leibniziltä, mutta sen matemaattinen täsmällisyys on perua Bernhard Riemannilta. Vaikka Riemann esitti käsitteen täsmällisesti, pitää vielä korostaa Jean-Gaston Darboux’n osuutta: Darboux esitti Riemannin määritelmään yhtyvän integraalikäsitteen, mutta Darboux’n määritelmä korostaa integraalin intuitiivisia ominaisuuksia ja siitä voidaan johtaa integraalin teoreettisia ominaisuuksia helpommin.

On myös lähtökohtaisesti toisin määriteltäviä, yleisempiä integraalikäsitteitä (kuten *Lebesgue*-integraali), jotka kuitenkin johtavat samaan lopputulokseen mikäli tarkastellaan funktioita, jotka ovat myös integroituvia Riemannin (ja Darboux’n) määritelmän mukaan. Tällä kurssilla tyydytään kuitenkin Riemann-integraaliin, joka esitetään käsitteellisesti yhtäpitävällä, Darboux’n kehittämällä tavalla.

Pinta-alan määrittävä integraali esitetään nykyaikaiset täsmällisyysvaatimukset täyttävällä tavalla. Kurssisisällön pitämiseksi kohtuullisen kokoisena muita geometrisiin sovelluksiin liittyviä integraaleja sen sijaan esitetään lähinnä Newtonin ja Leibnizin infinitesimaalilaskennan ajatustapaa noudattaen.

Taustatietoa



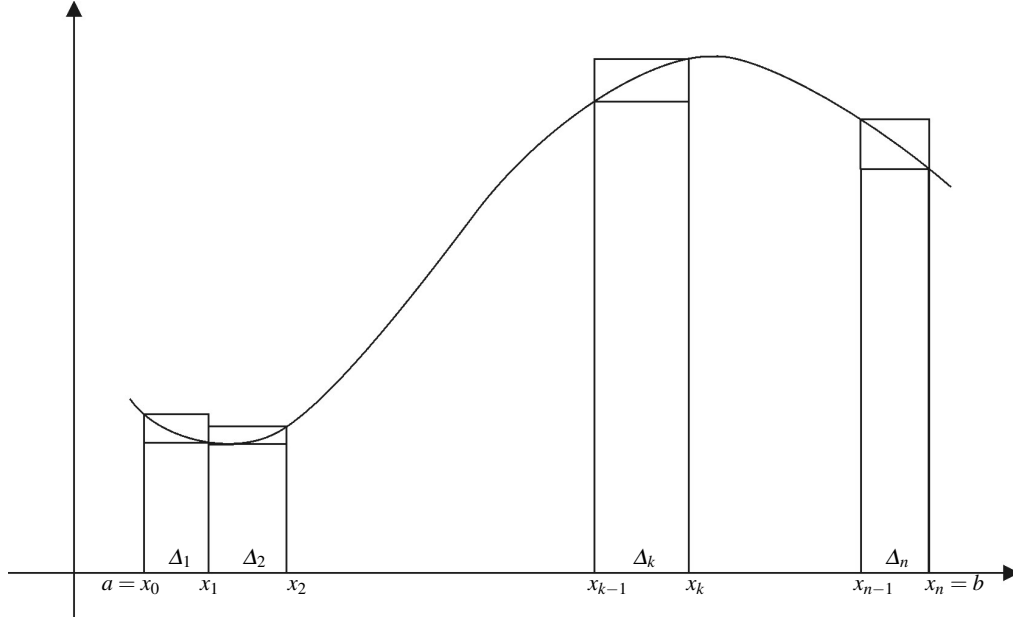
Bernhard Riemann (1826–1866) oli saksalainen matemaatikko, joka opiskeli Gaussin johdolla. Riemann teki urauurtavaa työtä differentiaali- ja integraalilaskennan, kompleksifunktioiden teorian ja geometrian alalla. Riemannin geometrian työt loivat pohjan Einsteinin yleiselle suhteellisuusteorialle ja hänen esittämänsä yhteys alkulukujen jakautumisen ja ns. *zeta-funktion* epätriviaalien nollakohtien välillä johti nykymatematiikan kuuluisimpaan avoimeen ongelmaan, ns. Riemannin hypoteesiin. Hypoteesin oikeaksi todistamisesta on luvattu miljoonan dollarin palkkio.

(kuva: Wikimedia Commons)

8.1 Riemann-integraali Darboux'n tavalla

Olkoon f välillä $[a, b]$ ($b > a$) määritelty, rajoitettu funktio. Integraalikäsitteen intuitiivisena taustana voidaan pitää tapausta $f(x) \geq 0$, jossa pyritään määrittämään pinta-ala, jota rajoittavat x -akseli, funktion kuvaaja ja suorat $x = a$ ja $x = b$. Tämä voidaan saavuttaa seuraavalla tavalla.

Välin $[a, b]$ jako tarkoittaa äärellistä joukkoa $D = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_i < x_{i+1}$ kun $0 \leq i \leq n-1$. Merkitään jaon i :nnettä väliä Δ_i :llä, siis $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ja tämän välin pituutta $\Delta_i x$:llä, siis $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Olkoot lisäksi M_i ja m_i funktion välillä Δ_i supremum- ja infimum-arvot: $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$, $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$. Koska f oletettiin rajoitetuksi koko välillä $[a, b]$, ovat M_i ja m_i olemassa kaikille osaväleille Δ_i .



Kuva 8.1 Jaon ylä- ja alasummia vastaavat pylväät osaväleilla 1, 2, k ja n . Väliä Δ_k vastaavien pylväiden korkeudet ovat m_k ja M_k

Määritelmä 48. Välin $[a, b]$ jakoon D liittyvä funktion f Darboux'n yläsumma on

$$\bar{S}_D = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i x$$

ja alasumma

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i x.$$

Lause 32. $\underline{S}_D \leq \bar{S}_D$.

Todistus. Seuraa suoraan siitä, että $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta_i\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_i\} = M_i$. $\square$

Määritelmä 49. Jos D_1 ja D_2 ovat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n *tiheennys* jos $D_1 \subseteq D_2$. Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, voidaan siis tiheennys D_2 saada D_1 :stä lisäämällä D_1 :een äärellinen määrä pisteitä.

Lause 33. Jos D_2 on jaon D_1 tiheennys, on $\bar{S}_{D_2} \leq \bar{S}_{D_1}$ ja $\underline{S}_{D_2} \geq \underline{S}_{D_1}$.

Todistus. Koska D_2 saadaan D_1 :stä äärellinen määrä pisteitä lisäämällä, riittää tarkastella tapausta, jossa jaon D_1 k :nnetta väliä tiheennetty yhdellä pisteellä x , siis $x_{k-1} < x < x_k$.

Tarkastellaan aluksi yläsummia. Jakoon D_2 liittyvä Darboux'n summa $\bar{S}_{D_2}$ saadaan nyt siis summasta $\bar{S}_{D_1}$ korvaamalla tämän k :s yhteenlaskettava $M_k \Delta_k x$ lausekkeella $M' \Delta'_x + M'' \Delta''_x$, missä M' ja M'' ovat funktion arvojen supremumit väleillä $\Delta' = [x_{k-1}, x]$ ja $\Delta'' = [x, x_k]$. On siis osoitettava, että $M' \Delta'_x + M'' \Delta''_x$ on korkeintaan $M_k \Delta_k x$. Koska M_k on funktion $f(x)$ pienin yläraja koko välillä $[x_{k-1}, x_k]$, on siis $M' \leq M_k$ ja $M'' \leq M_k$. Tällöin

$$M' \Delta'_x + M'' \Delta''_x \leq M_k(x - x_{k-1}) + M_k(x_k - x) = M_k(x_k - x_{k-1}) = M_k \Delta_k x.$$

Alasummia koskeva väite seuraa samalla tavalla siitä tosiasista, että osajoukon infimum ei ole pienempi kuin koko joukon infimum. $\square$

Lause 34. Kaikki alasummat ovat korkeintaan mikä tahansa yläsumman suuruisia, ts. $\underline{S}_{D_1} \leq \bar{S}_{D_2}$, missä D_1 ja D_2 ovat mitä hyvänsä välin $[a, b]$ jakoja.

Todistus. Olkoon $D = D_1 \cup D_2$, jolloin siis D on sekä jaon D_1 että jaon D_2 tiheennys. Edellisten lauseiden mukaan

$$\underline{S}_{D_1} \leq \underline{S}_D \leq \bar{S}_D \leq \bar{S}_{D_2}.$$

$\square$

Ylä- ja alasummia on joka tapauksessa molempia olemassa: esimerkiksi välin $[a, b]$ karkein jako $D_0 = \{a, b\}$ tuottaa alasumman $\underline{S}_{D_0} = m(b - a)$ ja yläsumman $\bar{S}_{D_0} = M(b - a)$, missä $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ ja $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Edellisen lauseen mukaan kaikkien alasummien joukko on ylhäältä rajoitettu ja kaikkien yläsummien joukko alhaalta rajoitettu, joten yläsummien joukolla on infimum ja alasummien joukolla supremum.

Määritelmä 50. Funktion f yläintegraali välillä $[a, b]$ on

$$\int_a^b f = \inf\{\bar{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

ja alaintegraali välillä $[a, b]$

$$\int_a^b f = \sup\{\underline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

Lauseesta 34 seuraa, että alaintegraali on suuruudeltaan korkeintaan yläintegraali.

Määritelmä 51. Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on (Riemann-) integroituva tällä välillä, mikäli

$$\int_a^b f = \int_{\bar{a}}^b f.$$

Tällöin ylä- ja alaintegraalin yhteistä arvoa kutsutaan funktion f (Riemann-) integraaliksi välillä $[a, b]$ ja siitä käytetään merkintöjä

$$\int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Lukuja a ja b kutsutaan integraalin *ala-* ja *ylärajoiksi* ja funktiota f *integrandiksi*.

Esimerkki 77. Vakiofunktio $f(x) = c$ on integroituva millä tahansa välillä $[a, b]$. Funktion infimum ja supremum nimittäin ovat millä hyvänsä välillä molemmat c , ja tällöin mihin tahansa jakoon $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) liittyvät ylä- ja alasummat ovat molemmat muotoa

$$\sum_{i=1}^n c \Delta_i x = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Täten siis ylä- ja alasummien joukossa on vain yksi alkio $c(b - a)$, joka on yhtäaikaan sekä alasummien supremum että yläsummien infimum. Vakiofunktion $f(x) = c$ integraali on siis

$$\int_a^b f = c(b - a).$$

Esimerkki 78. Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ joka on määritelty ehdoilla

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

ei ole Riemann-integroituva millään välillä $[a, b]$ ($a < b$). Tämä johtuu siitä, että jokaisella välillä $[x_{i-1}, x_i]$ ($x_{i-1} < x_i$) on sekä rationaali- että irrationaaliluku, siis funktion f supremum 1 ja infimum 0. Tällöin funktion f jokainen yläsumma on $b - a$ ja alasumma 0, ja siksi yläintegraalin arvo on $b - a$ ja alaintegraalin 0.

Koska integraalin määritelmä perustuu kaikkiin mahdollisiin välin $[a, b]$ jakoihin liittyviin ylä- ja alasummiin, on integraalin laskeminen määritelmään perustuen varsin työlästä. Seuraavan lauseen perusteella voidaan kuitenkin tarkastelua toisinaan rajoittaa tiettytyyppisiin jakoihin.

Lause 35. Jos $\mathcal{D}'$ on jokin joukko välin $[a, b]$ jakoja ja

$$I = \sup\{\underline{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\} = \inf\{\bar{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\},$$

niin tällöin f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f = I.$$

Todistus. Olkoon $\mathcal{D}$ kaikkien välin $[a, b]$ jakojen joukko. Tällöin

$$\begin{aligned}
I &= \sup\{\underline{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\} \leq \sup\{\underline{S}_D \mid D \in \mathcal{D}\} = \int_a^b f \\
&\leq \int_a^b f = \inf\{\bar{S}_D \mid D \in \mathcal{D}\} \leq \inf\{\bar{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\} = I.
\end{aligned}$$

□

Jos siis esimerkiksi *tasavälisiin jakoihin* liittyviin funktion f Darboux'n summille alasummien supremum I on sama kuin yläsummien infimum, niin tällöin f on integroitava välillä $[a, b]$, ja integraalin arvo on I .

Esimerkki 79. Olkoon $a = 0$, $b = 1$ ja $f(x) = x^2$ ja $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ välin $[0, 1]$ tasavälinen jako. Yhden jakovälin pituus on tällöin $\Delta_i x = \frac{1}{n}$, ja koska f on jatkuva ja välillä $[0, 1]$, on sillä olemassa maksimi- ja miniarvo jokaisella välillä $\Delta_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Koska lisäksi f on kasvava välillä $[0, 1]$, on $M_i = (\frac{i}{n})^2$ ja $m_i = (\frac{i-1}{n})^2$.

Jakoon D_n liittyvät ylä- ja alasummat voidaan laskea nyt kaavan

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

avulla:

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{D_n} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \quad \text{ja} \\
\underline{S}_{D_n} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\
&= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3n-1}{2n^2}\right).
\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että tasavälisten jakojen joukossa yläsummien infimum on $\frac{1}{3}$, mikä on sama kuin alasummien supremum. Täten siis

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

8.2 Funktioiden integroituvuus

Lause 36 (Riemannin integroituvuusehto). Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on integroitava tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ε kohti on olemassa välin $[a, b]$ jako $D = D_\varepsilon$, jolle

$$\bar{S}_D - \underline{S}_D \leq \varepsilon.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että f on integroitava ja merkitään $I = \int_a^b f$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska I on yläsummien infimum (pienin alaraja), on olemassa sellainen yläsumma $\bar{S}_{D_1}$, että $\bar{S}_{D_1} < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Koska I on myös alasummien supremum, on olemassa sellainen alasumma $\underline{S}_{D_2}$, että $\underline{S}_{D_2} > I - \frac{\varepsilon}{2}$. Olkoon $D = D_1 \cup D_2$ jakojen D_1 ja D_2 yhteinen tihennys. Tällöin lausetta 33 käyttämällä saadaan

$$\bar{S}_D - \underline{S}_D \leq \bar{S}_{D_1} - \underline{S}_{D_2} < I + \frac{\varepsilon}{2} - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

Oletetaan sitten, että lauseen ehto on voimassa. Koska yläintegraali on korkeintaan minkä hyvänsä yläsumman suuruinen ja alaintegraali vähintään minkä hyvänsä alasumman suuruinen, on

$$0 \leq \int_a^b f - \int_{\bar{a}}^b f \leq \bar{S}_D - \underline{S}_D < \varepsilon.$$

Koska ylä- ja alaintegraalin erotus ei ole negatiivinen, mutta pienempi kuin mikä hyvänsä positiiviluku ε , on se nolla. $\square$

Lause 37. Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, on se myös integroituva tällä välillä.

Todistus. Koska f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$, on se myös tasaisesti jatkuva tällä välillä. Täten siis $|f(x_1) - f(x_2)|$ saadaan miten pieneksi tahansa kun $|x_1 - x_2|$ valitaan riittävän pieneksi (ja x_1 ja x_2 on valittu väliltä $[a, b]$). Erityisesti

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

kun $|x_1 - x_2| < \delta$. Olkoon D välin $[a, b]$ jako, jonka kukin jakoväli Δ_i on korkeintaan δ :n pituinen. Jatkuvana funktiona f saavuttaa kullakin jakovälillä Δ_i maksimi- ja minimiarvon M_i ja m_i , jotka siis täten yhtyvät supremum- ja infimumarvoihin. Tällöin $M_i - m_i = f(x_i) - f(y_i)$ joillekin jakovälin Δ_i pisteille x_i ja y_i , joten $M_i - m_i = |M_i - m_i| = |f(x_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, sillä $|x_i - y_i| < \delta$ (koska x_i ja y_i molemmat kuuluvat jakoväliin Δ_i , jonka pituus on korkeintaan δ). Näin ollen

$$\bar{S}_D - \underline{S}_D = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta_i x < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta_i x = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Koska ylä- ja alasumman erotus saadaan miten pieneksi hyvänsä, seuraa integroituvuus lauseesta 36. $\square$

Lause 38. Jos integroituvan funktion arvoa muutetaan yhdessä pisteessä, ei integroituvuus eikä integraalin arvo muutu.

Todistus. Harjoitustehtävä. Huomaa lisäksi, että ”yhdessä” voidaan helposti muuttaa muotoon ”äärellisen monessa”.

8.3 Integraalien perusominaisuuksia

Integraalit saadaan summien rajatapauksina, minkä vuoksi monet summien ominaisuuksista periytyvät integraaleille. Seuraavassa esitetään tärkeimpiä integraalien ominaisuuksia, mutta näiden todistukset jätetään harjoituksiksi.

Lause 39. Oletetaan, että f ja g integroituvia välillä $[a, b]$. Tällöin myös funktiot cf ($c \in \mathbb{R}$) ja $f + g$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja

$$\begin{aligned} \int_a^b cf &= c \int_a^b f, \\ \int_a^b (f + g) &= \int_a^b f + \int_a^b g. \end{aligned}$$

Todistus. Jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 40. Jos f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $c \in (a, b)$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Todistus. Jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 41. Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$, niin samoin on fg . Jos lisäksi $\frac{1}{g}$ on rajoitettu välillä $[a, b]$, niin myös $\frac{f}{g}$ on integroituva.

Todistus. Sivuutetaan.

Seuraavaksi laajennetaan integraalin määritelmää sellaisiin tapauksiin, missä integraalin yläraja on pienempi kuin alaraja.

Määritelmä 52. Jos $a < b$ ja f on integroituva välillä $[a, b]$, määritellään

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

jos $f(a)$ on määritelty, määritellään edelleen

$$\int_a^a f = 0.$$

Huomautus 47. Ylläolevista määritelmistä seuraa, että mikäli f on integroituva välillä I , ja $a, b, c \in I$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

olipa lukujen a, b ja c keskinäinen suurusjärjestys mikä hyvänsä.

Myös Insinöörimatematiikka A:n johdannossa esitetyt summien suuruusarviot kääntyvät integraalien suuruusarvioiksi. Seuraavassa esitettyjen tulosten todistukset perustuvat Darboux'n summien arviointeihin.

Lause 42. Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja $f \leq g$, on

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Jos erityisesti valitaan $f = 0$, saadaan seurauksena, että välillä $[a, b]$ positiivisen funktion integraali on vähintään 0. Tätä havaintoa voidaan tarkentaa seuraavasti:

Lause 43. Jos f on jatkuva ja $f \geq 0$ välillä $[a, b]$ niin $\int_b^a f = 0$ tarkalleen silloin kun $f = 0$ välillä $[a, b]$.

Todistus. Harjoitustehtävä.

Myös summien kolmioepäyhtälö siirtyy integraaleille:

Lause 44. Jos f on integroituva välillä $[a, b]$, niin myös $|f|$ on integroituva ja tällöin

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Todistus. Sivuuutetaan, mutta huomataan, että mikäli $a > b$, pätee lause muodossa

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|.$$

8.4 Analyysin peruslause

Aiemmin on nähty, että Arkhimedeen tapa laskea integraaleja summien avulla saattaa olla varsin työläs. Arkhimedes ei tuntenut differentiaalilaskentaa, jonka tarjoama yhteys integraalilaskentaan helpottaa integraalien laskemista huomattavasti. Tässä luvussa esiteltävä 1600-luvulla löydetty tulos, analyysin peruslause oli huomattavin matematiikan edistysaskel 1800 vuoteen. Analyysin peruslause käytännössä yhdistää differentiaali- ja integraalilaskennan.

Oletetaan, että funktio f on integroituva jollakin välillä I ja että $c \in I$. Tällöin kutakin $x \in I$ kohti on olemassa integraali $\int_c^x f$, joten siis yhtälö

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

määrittelee funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$. Näin saatua funktiota kutsutaan f :n integraalifunktioksi.

Lause 45. Välillä I rajoitetun ja integroituvan funktion f integraalifunktio on jatkuva välillä I .

Todistus. Merkitään $M = \sup\{|f(x)| \mid x \in I\}$ ja $x_0 \in I$. Jos x on niin lähellä pistettä x_0 , että $x \in I$, on tällöin

$$|F(x_0) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^x f - \int_c^x f \right| = \left| \int_{x_0}^c f \right| \leq \left| \int_{x_0}^c |f| \right| \leq M |x_0 - x|.$$

Tällöin $d(F(x_0), F(x)) = |F(x_0) - F(x)| < \varepsilon$, kunhan $d(x_0, x) = |x_0 - x| < \frac{\varepsilon}{M}$. Koska x_0 on mikä hyvänsä välin I piste, on F jatkuva koko välillä I . $\square$

Esimerkki 80. Edellisessä lauseessa ei tarvittu integrandin jatkuvuutta. Jos esimerkiksi määritellään

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 1, & \text{kun } x \geq 0, \end{cases}$$

sekä $F(x) = \int_{-1}^x f$, kun $x \in [-1, 1]$. Tällöin

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ x, & \text{kun } x \geq 0, \end{cases}$$

ja siis F on jatkuva myös f :n epäjatkuvuuskohdassa $x = 0$. Sen sijaan F ei ole derivoituva tässä pisteessä.

Lause 46 (Analyysin peruslause). *Funktion f integraalifunktio F on derivoituva niissä pisteissä, missä f on jatkuva. Näissä pisteissä pätee lisäksi*

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f = f(x).$$

Todistus. Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 sekä h niin pieni, että $x_0 + h$ kuuluu välille I jossa f on integroituva. Tällöin

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_c^{x_0+h} f - \int_c^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f.$$

Näin saatu lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + f(x) - f(x_0)) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dx + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0)) dx \\ &= hf(x_0) + h \cdot \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0)) dx. \end{aligned}$$

Osoitetaan vielä, että lauseke $\varepsilon(h) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0)) dx$ saadaan miten pieneksi hyvänsä valitsemalla h riittävän läheltä nollaa. Juuri tässä tarvitaan funktion f jatkuvuutta pisteessä x_0 . Valitaan $\varepsilon > 0$. Jatkuvuuden perusteella on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, kun $d(x, x_0) < \delta$. Kun valitaan h siten että $|h| < \delta$, toteutuu $d(x, x_0) < \delta$ ja siis

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h) - 0| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0)) dx \right| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dx \right| = \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jos siis vielä määritellään $\varepsilon(0) = 0$, on $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \varepsilon(0) = 0$ ja

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = hf(x_0) + h\varepsilon(h),$$

mikä derivaatan määritelmän mukaan tarkoittaa, että $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Seuraus 11. *Jos funktio f on jatkuva välillä I , on sen integraalifunktio F derivoituva välillä I ja $F'(x) = f(x)$ kun $x \in I$. Täten siis välillä I jatkuvalla funktiolla on aina olemassa antiderivaatta eli kantafunktio eli määräämätön integraali.*

Huomautus 48. Vaikka edellisen seurauksen mukaan jatkuvan funktion antiderivaatta on aina olemassa, ei sille välttämättä löydy aina yksinkertaista esitystapaa. On nimittäin mahdollista, että alkeisfunktion antiderivaatta ei ole alkeisfunktio.

Esimerkki 81. Olkoon $h(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$ ja lasketaan $h'(x)$. Koska $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, saadaan integrandi määriteltyä ja jatkuvaksi origossa asettamalla sen arvoksi 1. Kun merkitään $g(u) = \int_0^u \frac{\sin t}{t} dt$, huomataan, että $h(x) = g(x^2)$ ja siis $h'(x) = g'(x^2)2x = \frac{\sin(x^2)}{x^2}2x = \frac{2\sin x^2}{x}$.

8.5 Integraalin arvon määrittäminen

Integraalin arvon määrittäminen tapahtuu suoraviivaisimmin analyysin peruslausetta sekä integraalilaskennan peruslausetta hyödyntäen. Jos nimittäin F on jokin välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion f antiderivaatta, on $F'(x) = f(x)$, mutta analyysin peruslauseen mukaan on myös

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Tällöin integraalilaskennan peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C,$$

missä C on jokin vakio. Sijoittamalla yllä olevaan yhtälöön $x = a$ saadaan vakion C arvoksi $C = -F(a)$ ja kun edelleen sijoitetaan $x = b$, saadaan integraalin laskemiseksi ns. *Newton–Leibnizin* kaava.

Lause 47 (Newtonin–Leibnizin kaava). Välillä $[a, b]$ jatkuvalle funktiolle f pätee

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

missä F on jokin funktion f antiderivaatta.

Määritelmä 53. Merkintä ”sijoitus a :sta b :hen” määritellään

$$\int_a^b F(x) = F(b) - F(a).$$

Esimerkki 82. Koska $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$, saadaan

$$\int_0^\pi \cos x dx = \int_0^\pi \sin x = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

Newton–Leibnizin kaavan suora soveltaminen edellyttää, että f on jatkuva integrointivälillä. Kuitenkin, jos funktiolla f on äärellisen monta epäjatkuvuuskohtaa tarkasteluvälillä, voidaan Newton–Leibnizin kaavaa soveltaa jakamalla väli osiin.

Esimerkki 83. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0, \\ x + 1, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 1, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Tällöin

$$\int_{-1}^2 f = \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 (x + 1) dx + \int_1^2 (x^2 + 1) dx = \frac{35}{6}.$$

Antiderivaatan määrittäminen voi olla toisinaan hankalaa, mutta *osittaisintegrointi* saattaa helpottaa integraalin määrittämistä.

Lause 48 (Osittaisintegrointi). Jos f ja g ovat derivoituneen jatkuvia funktioita välillä $[a, b]$, niin

$$\int_a^b f g' = \left/ f g - \int_a^b f' g \right.$$

Todistus. Seuraa suoraan tulon derivointisäännöstä $(fg)' = f'g + fg'$ ja Newton–Leibnizin kaavasta. $\square$

Esimerkki 84. Lasketaan integraali $\int_0^2 x e^x dx$. Merkitään tätä varten $f(x) = x$ ja $g(x) = e^x$, jolloin siis $g'(x) = e^x$, $f'(x) = 1$ ja osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_0^2 x e^x dx = \left/ x e^x - \int_0^2 e^x dx \right. = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1.$$

Myös *sijoitus integraaliin* saattaa helpottaa integraalin määrittämistä.

Lause 49 (Sijoitus määrättyyn integraaliin). Olkoon f jatkuva välillä I ja $[a, b] \subseteq I$. Olkoon lisäksi g välillä $[\alpha, \beta]$ derivoituneen jatkuva funktio, joka toteuttaa ehdot $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$ sekä $g(\alpha) = a$ ja $g(\beta) = b$. Tällöin

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t) dt.$$

Todistus. Olkoon $h(x) = \int_a^x f$. Koska f on jatkuva, on h derivoituva välillä I ja $h'(x) = f(x)$. Tällöin myös funktio $F(t) = h(g(t))$ on derivoituva ja $F'(t) = h'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Newton–Leibnizin kaavaa käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt &= \int_\alpha^\beta F'(t) dt = \left/ F(t) \right. = h(g(\beta)) - h(g(\alpha)) \\ &= h(a) - h(b) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 85. Lasketaan integraali $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ käyttämällä sijoitusta $x = g(t) = \sin t$. Valitaan $\alpha = 0$ ja $\beta = \frac{\pi}{2}$, jolloin $g(\alpha) = g(0) = 0$ ja $g(\beta) = g(\frac{\pi}{2}) = 1$. Lisäksi $g'(t) = \cos t$, joten

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

Näin saatu integraali voidaan edelleen määrittää trigonometrisen kaavan $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ avulla:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left/ \frac{1}{2} \sin 2t \right. = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Palautetaan mieleen, että funktio f on *parillinen*, jos $f(-x) = f(x)$ ja *pariton*, jos $f(-x) = -f(x)$. Parillisten tai parittomien funktioiden integraalin määrittämistä voidaan toisinaan yksinkertaistaa:

Lause 50. Olkoon f jatkuva välillä $[-a, a]$. Jos f on parillinen, on

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f,$$

ja jos f on pariton, on

$$\int_{-a}^a f = 0.$$

Todistus. Hajotetaan integraali osiin:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

ja sijoitetaan ensimmäiseen summattavaan $x = g(t) = -t$. Tällöin

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-1) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx.$$

Näin ollen

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(-x) + f(x)) dx,$$

ja väite seuraa suoraan tästä. $\square$

Esimerkki 86. Lasketaan integraali $\int_{\pi}^{3\pi} \sqrt{1 + \sin^2 x} \sin x dx$. Tehdään ensiksi sijoitus $x = g(t) = t - 2\pi$, jolloin $g'(t) = 1$ ja

$$\int_{\pi}^{3\pi} \sqrt{1 + \sin^2 x} \sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \sin^2(t - 2\pi)} \sin(t - 2\pi) dt.$$

Sinifunktion jaksollisuudesta johtuen ylläoleva integraali voidaan kirjoittaa muotoon

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t} \sin t dt,$$

josta puolestaan integrandin parittomuuteen perustuen nähdään, että integraalin arvo on 0.

Matlabissa on määrätyn integraalin laskemiseksi symbolisen matematiikan työkalu:

```
>> syms x
>> f=x^5
```

```
f =
```

```
x^5
```

```
>> int(f,x,1,3)
```

```
ans =
```

```
364/3
```

```
>>
```

Määrätyn integraalin likiarvon laskemista (numeerista integrointia) varten Matlabissa on `quad` ja `quadl`-toiminnot:

```
>> quad(@sin,1,4)
```

```
ans =  
    1.1939  
  
>>
```


Luku 9

Integraalin sovelluksia

9.1 Pinta-ala

Olkoon f on välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva, ei-negatiivinen funktio. Tarkastellaan aluetta, jota rajoittavat x -akseli, suorat $x = a$ ja $x = b$, sekä käyrä $y = f(x)$. Integraalin määritelmän perusteella on täysin ilmeistä, että ainoa mielekäs tapa määritellä tarkasteltavan alueen pinta-ala on nimenomaan määritellä ala integraaliksi

$$\int_a^b f.$$

Esimerkki 87. Selvitetään käyrän $y = x^2$, x -akselin ja suorien $x = 2$ ja $x = 4$ väliin jäävä ala. Suoralla laskulla saadaan

$$A = \int_2^4 x^2 dx = \left/ \frac{1}{3} x^3 \right|_2^4 = \frac{1}{3} (4^3 - 2^3) = \frac{56}{3}$$

Esimerkki 88. Selvitetään käyrien $y = x^3$, $y = x^2$ ja suorien $x = 3$ ja $x = 5$ väliin jäävä ala. Aluksi todetaan, että välillä $[3, 5]$ käyrä $y = x^3$ on kokonaan käyrän $y = x^2$ yläpuolella. Voidaan siis laskea käyrän $y = x^3$, x -akselin ja suorien $x = 3$ ja $x = 5$ väliin jäävä ala ja vähentää siitä ala, joka jää käyrän $y = x^2$ alle välillä $[3, 5]$. Näin ollen kysytty ala on

$$A = \int_3^5 x^3 dx - \int_3^5 x^2 dx = \int_3^5 (x^3 - x^2) dx = \left/ \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \right) \right|_3^5 = \frac{310}{3}.$$

Infinitesimaalilaskennan näkökulmasta pinta-alan määrittäminen voidaan tulkita seuraavasti: Väli $[a, b]$ jaetaan ”äärettömän kapeisiin” suorakaiteisiin, joiden leveys on dx ja korkeus $f(x)$. Kunkin ”äärettömän kapean” suorakaiteen ala on täten $f(x) dx$ ja määritettävän alueen pinta-ala saadaan ”äärettömänä summana” (integraalina)

$$\int_a^b f(x) dx.$$

On kuitenkin huomattava, että tällä kurssilla ei infinitesimaalien käsitettä ole täsmennetty millään tavalla ja täten edellämainittu viittaus infinitesimaalilaskentaan on tarkoitettu lähinnä intuitioon perustuvaksi muistisäännöksi. Muut tämän kurssin geometriset sovellukset esitetään infinitesimaalilaskennan tavalla ja tyydytään vain toteamaan, että tämä käytäntö voitaisiin perustella täsmällisesti Riemann-summien avulla.

Määritelmä 54. Välillä $[a, b]$ integroituvan funktion f keskiarvo määritellään lausekkeena

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Määritelmän motivaatiota varten on hyödyllistä tarkastella tapausta $f(x) > 0$ ja piirtää näkyviin suorakulmio, jonka kanta on $b - a$ ja pinta-ala sama, joka jää käyrän $y = f(x)$, x -akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ väliin.

9.2 Kaarenpituus: Parametrimuoto

Määritelmä 55. Käyrä tasossa $\mathbb{R}^2$ funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, missä I on jokin reaalilukuväli. Yhtäpitävästi voidaan käyrä määritellä parametrimuotoisena relaationa $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$.

Edellisen määritelmän mukaisella tavalla esitettyä käyrää sanotaan *parametrimuotoiseksi*. Jokainen funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ määrittelee myös käyrän (ns. *xy-muoto*), josta saadaan parametrimuoto asettamalla $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$.

Määritelmä 56. Käyrä $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$ on *jatkuva* mikäli funktiot $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jatkuvia. Lisäksi sanotaan, että käyrä Γ on *sileä*, mikäli myös $x'(t)$ ja $y'(t)$ ovat jatkuvia.

Olkoon $I = [a, b]$ ja oletetaan, että Γ on sileä käyrä. Selvitetään käyrän $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ pituus infinitesimaalilaskennan ajatustavalla. Merkitään ”äärettömän pientä” käyrän osaa ds :llä, jolloin käyrän pituus L on ”ääretön” summa (integraali) yli kaikkien ”äärettömän pienten” käyrän osien:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds.$$

Infinitesimaalisen käyrän alkion tulisi toteuttaa yhtälö $ds^2 = dx^2 + dy^2$, jolloin käyrän pituudeksi saadaan

$$L = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (9.1)$$

Sanotaan, että käyrä on *suoristuva*, mikäli sillä on äärellinen pituus.

Esimerkki 89. Syklodi määritellään parametriesityksellä

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t, \end{cases}$$

missä $t \in [0, 2\pi]$. Tällöin $x'(t) = 1 - \cos t$ ja $y'(t) = \sin t$. Syklodin kaarenpituudeksi saadaan siis kaavan (9.1) mukaan

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 2 \left/ (-2) \cos \frac{t}{2} \right|_0^{2\pi} = 2(2 - (-2)) = 8. \end{aligned}$$

Yllä on käytetty trigonometrista kaavaa $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ (yhtäpitävästi $\cos t = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$) kolmatta yhtäsuuruutta varten.

9.3 Kaarenpituus: xy-muoto

Jos käyrä on annettu muodossa $y = f(x)$, saadaan tästä parametrimuoto välittömästi asettamalla $x = t, y = f(t)$. Tällöin $x'(t) = 1$ ja $y'(t) = f'(t)$ ja siis kaarenpituudeksi saadaan

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (9.2)$$

Esimerkki 90. Lasketaan käyrän $y = f(x) = \ln x$ pituus välillä $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$. Koska $f'(x) = \frac{1}{x}$, saadaan kaavan (9.2) mukaan

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx.$$

Funktion $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ kantafunktion löytämiseksi tehdään sijoitus $x = \tan t$, jolloin

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t} \frac{1}{\cos^2 t} dt,$$

mikä puolestaan suoralla laskulla saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx &= \int \frac{1}{\sin t \cos^2 t} dt = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt + \int \frac{1}{\sin t} dt \\ &= \frac{1}{\cos t} + \ln \frac{1 - \cos t}{\sin t}. \end{aligned}$$

Viimeisin summattava voidaan perustella seuraavalla laskutoimituksella:

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \frac{\sin^2 t - (1 - \cos t) \cos t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin t}.$$

Jotta voitaisiin palata alkuperäiseen muuttujaan $x = \tan t$, voidaan laskea $x^2 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} - 1$, josta $\cos^2 t = \frac{1}{x^2 + 1}$ ja edelleen $\sin^2 t = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Näin ollen

$$\frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\tan t} = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

ja näin saadaan funktion $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ kantafunktioksi (kun $x > 0$)

$$\sqrt{x^2 + 1} + \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}.$$

(Tarkasta derivoimalla onko tämä todella funktion $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ kantafunktio). Tällöin

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \left[\sqrt{x^2 + 1} + \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = 1 + \ln \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,20273.$$

9.4 Tilavuus

Kolmiulotteisessa avaruudessa tilavuuden määrittäminen tapahtuu yleensä kolmen muuttujan funktion integraalin avulla, mutta joissakin tapauksissa tilavuus voidaan kahden tai erittäin säännöllisten kappaleiden tapauksessa jopa yhden muuttujan funktion integraalin avulla.

Yhden muuttujan integraaliin voidaan toisinaan päästä seuraavalla tavalla: Ajatellaan, että tasojen $x = a$ ja $x = b$ väliin jäävästä kappaleesta tunnetaan x -akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen ala $A(x)$ kussakin pisteessä x . Kappale oletetaan sellaiseksi, että funktio $A(x)$ on jatkuva välillä $[a, b]$.

Infinitesimaalilaskennan näkökulmasta katsoen tällöin ajateltaisiin, että välillä $[a, b]$ kappale jaetaan äärettömän moneen ”äärettömän ohueeseen” viipaleeseen, joista kunkin tilavuus on $A(x) dx$ ($x \in [a, b]$), ja tällöin koko kappaleen tilavuus saadaan integraalina

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Esimerkki 91. Tarkastellaan kartiota, jonka korkeus on h ja pohjan ala A . Asetetaan koordinaatisto siten, että kartion kärki on origossa ja pohja kohtisuorassa x -akselia vastaan. Tällöin siis kartion pohja on osa tasoa $x = h$.

Yhdenmuotoisten alojen suhde on sama kuin mittakaavan neliö, joten x -akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen ala $A(x)$ pisteessä $x \in [0, h]$ toteuttaa $\frac{A(x)}{A} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, siis $A(x) = \frac{A}{h^2}x^2$. Tällöin kartion tilavuus on

$$V = \int_0^h \frac{A}{h^2} x^2 dx = \frac{A}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{A}{h^2} \left/ \frac{1}{3} x^3 \right|_0^h = \frac{1}{3} Ah.$$

Oletetaan, että käyrä $y = f(x)$ on x -akselin yläpuolella välillä $[a, b]$ ja tarkastellaan *pyöräyskappaletta*, joka piirtyy käyrän pyörähtäessä x -akselin ympäri. Tällöin x -akselia vastaan kohtisuoran leikkauksen pinta-ala $A(x) = \pi f(x)^2$ ja siis tasojen $x = a$ ja $x = b$ rajoittama tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Esimerkki 92. Ellipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pyörähtäessä x -akselin ympäri piirtyy *pyöräysellipsoidi*. Tämän tilavuus on

$$\pi \int_{-a}^a y^2 dx = 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi b^2 \left/ \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \right|_0^a = \frac{4}{3} \pi ab^2.$$

Erikoistapauksessa $a = b = r$ saadaan r -säteisen pallon tilavuudeksi.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Luku 10

Integraalikäsitteen laajennuksia

Riemann-integraali määriteltiin alun perin vain siinä tapauksessa, että integrointiväli on äärellinen ja integrandi rajoitettu. Molemmista rajoitteista voidaan toisinaan luopua, jolloin päädytään niin kutsuttuihin *epäoleellisiin* integraaleihin. Sovellusten kannalta nämä yleistykset ovat ainakin yhtä merkittäviä kuin varsinaiset Riemann-integraalit, ja niistä käytetään samankaltaisia merkintöjä kuin varsinaisista integraaleistakin.

10.1 I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä 57. Olkoon f integroitava välin $[a, \infty)$ jokaisella äärellisellä osavälillä $[a, M]$. Määritellään

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa äärellisenä. Tällöin sanotaan, että *I lajin epäoleellinen integraali suppenee*. Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan, että integraali *hajaantuu*. Integraalin hajaantuessa merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow,$$

ja suppenevassa tapauksessa merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

I lajin epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin $\int_{-\infty}^\infty f$ määritelmää tarkastellaan myöhemmin.

Esimerkki 93. Selvitetään, suppeneeko $\int_0^\infty xe^{-x} dx$. Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^M xe^{-x} dx &= \int_0^M x \frac{d}{dx}(-e^{-x}) dx = \int_0^M -xe^{-x} + \int_0^M e^{-x} dx \\ &= -Me^{-M} - \int_0^M e^{-x} = -Me^{-M} - e^{-M} + 1, \end{aligned}$$

mistä nähdään, että

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M xe^{-x} dx = 1.$$

Siis tarkasteltava epäoleellinen integraali suppenee, ja sen arvo on 1.

Esimerkki 94. Integraali $\int_0^\infty \cos x dx$ hajaantuu, sillä

$$\int_0^M \cos x dx = \left/ \sin x \right|_0^M = \sin M,$$

eikä raja-arvoa $\lim_{M \rightarrow \infty} \sin M$ ole olemassa.

Esimerkki 95. Olkoon $a > 0$ ja tarkastellaan integraalin

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s} dx$$

suppenemista s :n eri arvoilla. Merkitään $I(M) = \int_a^M \frac{1}{x^s} dx$ ja tarkastellaan mitä tapahtuu, kun M lähenee ääretöntä. Jos $s \neq 1$, on $\frac{d}{dx} \frac{1}{1-s} \frac{1}{x^{s-1}} = \frac{1}{x^s}$ ja

$$I(M) = \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{M^{s-1}} - \frac{1}{a^{s-1}} \right),$$

mistä nähdään, että

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \begin{cases} -\frac{1}{1-s} \frac{1}{a^{s-1}}, & \text{jos } s > 1, \\ \infty, & \text{jos } s < 1. \end{cases}$$

Tapauksessa $s = 1$ saadaan

$$I(M) = \int_a^M \frac{1}{x^s} dx = \left/ \ln x \right|_a^M = \ln M - \ln a,$$

joten $\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) = \infty$. Näin ollen epäoleellinen integraali $\int_a^\infty \frac{1}{x^s} dx$ suppenee tarkalleen silloin kun $s > 1$ ja tällöin

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1} a^{1-s}.$$

Huomautus 49. Epäoleellisten integraalien yhteydessä käytetään toisinaan lyhyiden vuoksi sijoitusmerkintää

$$\left/ f(x) \right|_a^\infty,$$

mikä tarkoittaa raja-arvoa

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left/ f(x) \right|_a^M.$$

Epäoleellisen integraalin suppenemiskysymystä on usein melko hankala ratkaista. Tähän liittyen tarkastellaan seuraavaksi joitakin *suppenemiskriteerejä*, mutta ensiksi voidaan todeta seuraavat epäoleellista integraalia koskevat seikat:

Lause 51. Oletetaan, että $\int_a^M f$ on olemassa kaikille $M > a$.

Jos integraali $\int_a^\infty f$ suppenee ja $b > a$, niin myös $\int_b^\infty$ suppenee ja

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

Lause 52.

$$\int_a^\infty (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g,$$

mikäli jälkimmäiset integraalit supenevat.

Todistus. Seuraa suoraan raja-arvojen laskusäännöistä, harjoitustehtävä.

Lause 53 (Vertailutarkastin). Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$ (M on jokin positiiviluku) ja f sekä g integroituvia jokaisella välillä $[a, b]$. Tällöin

1. Jos $\int_a^\infty g$ suppenee, niin myös $\int_a^\infty f$ suppenee.
2. Jos $\int_a^\infty f$ hajaantuu, niin myös $\int_a^\infty g$ hajaantuu.

Todistus. Sivuutetaan.

Huomautus 50. Edellisen lauseen tilanteessa sanotaan, että f on g :n *minorantti* ja että g on f :n *majorantti*. Suppenevasta majorantista seuraa siis suppeneminen, ja hajaantuvasta minorantista hajaantuminen.

Esimerkki 96. Tarkastellaan integraalia $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} dx$. Todetaan, että

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Esimerkin 95 mukaan integraali $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ suppenee, joten lauseen 53 mukaan myös tarkasteltava integraali suppenee.

Vaikka tarvittava majorantti tai minorantti olisikin saatavilla, saattaa silti vertailu olla työlästä.

Esimerkki 97. Tarkastellaan integraalia $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx$. Integrandille on helppo löytää minorantti:

$\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, kun $x \in [2, \infty)$. Edelleen todetaan, että $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ suppenee, mutta minoranttifunktion integraalin suppeneminen ei kuitenkaan johda alkuperäisen integraalin suppenemiseen.

Toisaalta integrandille saadaan myös majorantti: Kun $x \geq 2$, on

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2^3}}} = \sqrt{\frac{8}{7}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

sillä funktio $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}$ on vähenevä välillä $[2, \infty)$.

Koska integraali $\int_2^\infty \sqrt{\frac{8}{7}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \sqrt{\frac{8}{7}} \int_2^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ suppenee, suppenee myös alkuperäinen integraali majoranttiperiaatteen perusteella.

Seuraavaksi esitettävä vertailutarkastimen raja-arvomuoto on yleensä helppokäyttöisempi kuin edellä esitetty tapa löytää majorantti. On kuitenkin huomattava, että raja-arvomuodon todistus perustuu samaan ajatukseen kuin ylläoleva tapa.

Lause 54. Oletetaan, että f ja g ovat positiivisia jostain rajasta lähtien ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

1. Jos $L = 0$, niin integraalin $\int_a^\infty g$ suppenemisesta seuraa integraalin $\int_a^\infty f$ suppeneminen.
2. Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_a^\infty g$ suppenee.
3. Jos $L = \infty$, niin integraalin $\int_a^\infty g$ hajaantumista seuraa integraalin $\int_a^\infty f$ hajaantuminen.

Todistus. Väitteiden 1. ja 3. todistus jätetään harjoitustehtäväksi ja todistetaan väite 2.

Oletetaan siis, että $0 < L < \infty$. Raja-arvon määritelmän mukaan $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right|$ saadaan miten pieneksi hyvänsä, kunhan x on kyllin suuri. Erityisesti $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \frac{L}{2}$, kunhan x valitaan riittävän suureksi. Tällaisilla x :n arvoilla on siis $\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}$, joten $\frac{3L}{2}g(x)$ on $f(x)$:n majorantti ja samoin $\frac{L}{2}f(x)$ on $g(x)$:n majorantti. Jos siis jompi kumpi integraaleista $\int_a^\infty f$ ja $\int_a^\infty g$ suppenee, suppenee toinenkin. $\square$

Esimerkki 98. Tarkastellaan integraalin $\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2} dx$ suppenemistä. otetaan vertailufunktioksi x^{s-2} , jolloin huomataan, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^s}{1+x^2}}{x^{s-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Tällöin siis tarkasteltava integraali suppenee tarkalleen silloin kun $\int_1^\infty \frac{1}{x^{2-s}} dx$ suppenee. Esimerkin 95 mukaan viimeksi mainittu integraali suppenee tarkalleen silloin, kun $2-s > 1$, mikä on yhtäpitävää ehdon $s < 1$ kanssa.

Vertailutarkastimen kummassakin muodossa oletettiin, että tarkasteltavat funktiot ovat ei-negatiivisia ainakin jostain rajasta lähtien. Tällöin jää avoimeksi miten äärettömän monta kertaa merkkiään vaihtavan funktion tapauksessa voidaan toimia, mutta tällaisiin tapauksiin voidaan toisinaan soveltaa seuraavaa lausetta.

Muistetaan aluksi, että kun $M \geq a$, niin integraalilaskennan kolmioepäyhtälön mukaan

$$\left| \int_a^M f(x) dx \right| \leq \int_a^M |f(x)| dx,$$

eikä tämän perusteella seuraavan lauseen tulos ole kovinkaan yllättävä.

Lause 55. Jos integraali $\int_a^\infty |f|$ suppenee, niin myös integraali $\int_a^\infty f$ suppenee.

Todistus. Joka tapauksessa pätee $0 \leq f + |f| \leq 2|f|$, joten majoranttiperiaatteen mukaan integraali $\int_a^\infty (f + |f|)$ suppenee. Näin ollen myös integraali $\int_a^\infty f = \int_a^\infty (f + |f|) - \int_a^\infty |f|$ suppenee. $\square$

On kuitenkin mahdollista, että $\int_a^\infty f$ suppenee, mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu. Tällöin sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee (jolloin siis myös $\int_a^\infty f$ suppenee) sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

Esimerkki 99. Integraali $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$ suppenee itseisesti, sillä itseisarvolla $\frac{|\sin x|}{x^2}$ on majorantti $\frac{1}{x^2}$ ja $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ suppenee.

Esimerkki 100. On mahdollista todistaa, että $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ suppenee ja että $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ hajaantuu.

Matlabin symbolisen matematiikan työkalun avulla voidaan myös määrittää joidenkin epäoleellisten integraalien arvoja:

```
>> syms x
>> f=exp(-x^2)

f =

exp(-x^2)

>> int(f,x,-inf,inf)

ans =

pi^(1/2)
```

10.2 II lajin epäoleellinen integraali

Edellä laajennettiin Riemann-integraalin käsite tapauksiin, joissa integroimisväli ei ole äärellinen. Analogisesti voidaan integraalikäsite laajentaa tapauksiin, joissa integrandi ei ole rajoitettu.

Määritelmä 58. Olkoon f integroitava jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \varepsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \varepsilon, b]$ ($\varepsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Tällöin integraalin $\int_a^b f$ sanotaan *suppenevan*, muutoin *hajaantuvan*.

Vastaavasti määritellään $\int_a^b f$ tapauksessa, jossa f on rajoitettu väleillä $[a + \varepsilon, b]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[a, a + \varepsilon]$. Tällöin määritellään siis

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f,$$

mikäli raja-arvo on olemassa.

Integraaleja, joissa integrandi ei ole rajoitettu, sanotaan *II lajin epäoleellisiksi integraaleiksi*.

Esimerkki 101. Tarkastellaan integraalin $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$ suppenemista. Jos $s \leq 0$, on integrandi rajoitettu koko integroimisvälillä, joten kyseessä on tavallinen Riemann-integraali. Jos taas $s > 0$, on integraali epäoleellinen, koska se ei ole rajoitettu alarajan a ympäristössä. Suppenemiskysymystä on siis mielekäs tarkastella vain, kun $s > 0$.

Oletetaan siis että $s > 0$ ja merkitään

$$I(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-a)^s} dx,$$

jolloin saadaan

$$I(\varepsilon) = \begin{cases} \ln \frac{b-a}{\varepsilon}, & \text{kun } s = 1 \\ \frac{1}{1-s}((b-a)^{1-s} - \varepsilon^{1-s}), & \text{kun } s \neq 1 \end{cases}$$

Tästä nähdään, että tapauksessa $s = 1$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I(\varepsilon) = \infty$ ja että $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I(\varepsilon) = \infty$, mikäli $s > 1$. Tapauksessa $0 < s < 1$ sen sijaan $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I(\varepsilon) = \frac{1}{1-s}(b-a)^{1-s}$, joten siis integraali $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$ suppenee tarkalleen silloin, kun $s < 1$ ja tällöin sen arvo on $\frac{1}{1-s}(b-a)^{1-s}$.

Huomautus 51. Soveltamalla ylläolevan esimerkin menettelyä voidaan todeta että ylärajaltaan epäoleellinen integraali

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^s} dx$$

suppenee tarkalleen silloin kun $s < 1$ ja tällöin integraalin arvo on $\frac{1}{1-s}(b-a)^{1-s}$.

I lajin epäoleellista integraalia koskevat tulokset voidaan muotoilla myös II lajin epäoleellisille integraaleille. Itse asiassa II lajin integraalit voidaan sopivin sijoituksin muuntaa I lajin integraaleiksi.

Esimerkki 102. Tehdään integraaliin $\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^s} dx$ sijoitus $x = \frac{1}{t}$, jolloin $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ ja siis

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^s} dx = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^1 \frac{1}{(1/t)^s} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{t^{2-s}} dt.$$

Luvun ε lähetessä nolla pitkin positiivista x -akselia luku $M = \frac{1}{\varepsilon}$ lähenee ääretöntä. Tällöin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^s} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^{2-s}} dx,$$

joten integraali $\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2-s}} dx$ suppenee. Esimerkin 101 mukaan ensimmäinen integraali suppenee, kun $s < 1$ ja esimerkin 95 mukaan jälkimmäinen integraali suppenee, kun $2-s > 1$. Ehdot $s < 1$ ja $2-s > 1$ ovat yhtäpitävät, kuten helposti todetaan.

Edellisen esimerkin sijoituksella voidaan vertailutarkastin kääntää suoraan koskemaan II lajin integraaleja. Vertailutarkastimen raja-arvomuodossa tulee tietenkin laskea raja-arvo $\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ tai $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ riippuen siitä, kummassa päässä integrointiväliä $[a, b]$ f ei ole rajoitettu.

Esimerkki 103. Tutkitaan integraalin $\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)} dx$ suppenemista eri s :n arvoilla. Kyseisessä integraalissa epäoleellisuuden aiheuttaa se, että funktio ei ole rajoitettu origon ympäristössä. Origon ympäristössä taas tekijä $\frac{x+1}{x^2+1}$ on lähellä ykköstä, joten integrandi muistuttaa funktiota $\frac{1}{x^s}$, kun x on lähellä nollaa. Tällöin kannattaa valita $\frac{1}{x^s}$ vertailuintegrandiksi. Todetaan, että

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x+1}{x^s(x^2+1)}}{\frac{1}{x^s}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+1}{x^2+1} = 1,$$

joten tutkittava integraali suppenee tarkalleen silloin kun $\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$ suppenee, mikä taas tapahtuu tarkalleen silloin kun $s < 1$.

Esimerkki 104. Integraalissa $\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$ epäolennaisuus ilmenee alarajalla: tällöin nimittäjä lähennee nollaa ja integrandi ei siis ole rajoitettu nollan lähistöllä. Voidaan kuitenkin todeta, että

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + x + O(x^2) - 1} = \frac{1}{x + O(x^2)},$$

joten vertailuintegrandiksi kannattaa valita $\frac{1}{x}$. Todetaan, että

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + x + O(x^2) - 1}{x} = 1,$$

joten integraalien $\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$ ja $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ suppenemiskäyttäytyminen on samanlainen. Koska jälkimmäinen integraali hajaantuu esimerkin 101 perusteella, hajaantuu myös edellinenkin.

10.3 Yleinen epäoleellinen integraali

Yhdistelemällä I ja II lajin epäolennaisia integraaleja saadaan ainakin seuraavaa tyyppiä olevia integraaleja:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f$, kun f on rajoitettu koko $\mathbb{R}$:ssä
- $\int_{-\infty}^{\infty} f$, kun f ei ole rajoitettu pisteessä c .
- $\int_a^b f$, kun f ei ole rajoitettu a :n ja b :n ympäristössä.
- $\int_a^b f$, kun f ei ole rajoitettu pisteessä $c \in (a, b)$.

Yleinen periaate ylläolevien (ja muiden vastaavien) integraalien tarkastelussa on jakaa integrointiväli sellaisiin osiin, että kullakin osavälillä esiintyy vain yksi epäoleellisuus.

Yleisesti integraali yli reaaliakselin määritellään seuraavasti, mutta tästä määritelmästä poiketaan Fourier-analyysin yhteydessä.

Määritelmä 59. Olkoon f rajoitettu koko $\mathbb{R}$:ssä. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f$ suppenee, mikäli integraalit $\int_{-\infty}^0 f$ ja $\int_0^{\infty} f$ molemmat suppenevat. Tällöin määritellään

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Huomautus 52. Edellisen määritelmän mukaan N ja M lähenevät ääretöntä toisistaan riippumatta. Joissakin tapauksissa raja-arvo

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f \quad (10.1)$$

voi olla olemassa, vaikka integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f$ hajaantuisikin. Raja-arvoa (10.1) kutsutaan integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ *Cauchyn pääarvoksi*. Fourier-analyysissä integraali yli reaaliakselin määritellään nimenomaan Cauchyn pääarvona.

Esimerkki 105. Helposti todetaan, että $\int_{-M}^M x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-M}^M = 0$, joten myös $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f = 0$. Kuitenkaan kumpikaan integraaleista $\int_{-\infty}^0 x dx$ tai $\int_0^{\infty} x dx$ ei suppene, kuten helposti todetaan.

Esimerkki 106. Tarkastellaan todennäköisyyyslaskennassa esiintyvää integraalia

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Ensiksi hajotetaan integraali kahdeksi osaksi:

$$\int_{-N}^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-N}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^M e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

minkä jälkeen ensimmäiseen osaan sijoitetaan $x = -t$, jolloin saadaan

$$\int_{-N}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_N^0 e^{-\frac{t^2}{2}} (-1) dt = \int_0^N e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Näin ollen suppenemiskysymystä tarkasteltaessa riittää tutkia, suppeneeko integraali $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Koska $e^{-\frac{x^2}{2}}$ on kaikkialla jatkuva funktio, on tällöin

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

mikäli viimeisin integraali suppenee. Täten siis riittää tarkastella integraalin $\int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ suppenemista.

Valitaan vertailuintegrandiksi $\frac{1}{x^2}$ ja todetaan, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Esimerkin 95 mukaan $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ suppenee, joten vertailutarkastimen perustella myös $\int_1^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ suppenee. Näin ollen siis myös integraali

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

suppenee. Usean muuttujan integraalilaskentaa käyttäen voidaan itse asiassa osoittaa että

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Esimerkki 107. Tarkastellaan integraalin

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s \sqrt{(1-x)^{4s-1}}} dx$$

suppenemista. Kun x on lähellä nollaa, on integrandi likimain lausekkeen $\frac{1}{x^s}$ suuruinen, kun taas lähellä pistettä $x = 1$ integrandi muistuttaa lauseketta $\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{4s-1}}}$. Täten siis integraalilla on kaksi epäoleellisuuskohtaa, ja suppenemistarkastelu voidaan siis jakaa integraaleihin

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^s \sqrt{(1-x)^{4s-1}}} dx \text{ ja } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^s \sqrt{(1-x)^{4s-1}}} dx.$$

Vertailuintegrandia $\frac{1}{x^s}$ käyttäen voidaan todeta, että ensimmäinen integraali suppenee tarkalleen silloin, kun $s < 1$ ja vertailuintegrandi $\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{4s-1}}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{4s-1}{2}}}$ paljastaa, että jälkimmäinen integraali suppenee tarkalleen silloin, kun $\frac{4s-1}{2} < 1$, mikä on yhtäpitävää ehdon $s < \frac{3}{4}$ kanssa. Täten siis tarkasteltava integraali suppenee tarkalleen silloin kun $s < \frac{3}{4}$.

Esimerkki 108. Tarkastellaan integraalin $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^s+1)} dx$ suppenemista ja sitä varten jaetaan integraali ensiksi kahteen osaan: Aluksi tarkastellaan osan

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x^s+1)} dx \tag{10.2}$$

suppenemista. Tässä integrandi muistuttaa nollan lähistöllä funktiota $\frac{1}{\sqrt{x}}$, ja käyttäen tätä funktiota vertailuintegrandina on helppo todentaa, että integraali 10.2 suppenee s :n arvosta riippumatta.

Jäljelle jää integraalin $\int_1^\infty f$ suppenemisen selvittäminen, ja tällöin tulee arvioida integrandia, kun x on suuri. Suurilla x :n arvoilla integrandi muistuttaa funktiota $\frac{1}{\sqrt{xx^s}} = \frac{1}{x^{s+\frac{1}{2}}}$, ja tätä vertailuintegrandina käyttäen voidaan raja-arvotarkastimen avulla todeta, että tutkittava integraali suppenee tarkalleen silloin kun $s + \frac{1}{2} > 1$, mikä toteutuu tarkalleen silloin kun $s > \frac{1}{2}$.

10.4 Integraalin määrittelemistä funktioista

Hyvin usein esiintyvässä tilanteessa funktio määritellään muiden funktioiden summana:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N g(i, x).$$

Jos esimerkiksi $g(i, x) = c_i x^i$, esittää yllä oleva summa yleistä polynomifunktiota. Vastaavasti on mahdollista esittää funktioita integraalina: esimerkiksi funktiot $g(t, x)$ ($t \in [a, b]$) voivat yhdessä määritellä funktion f seuraavasti:

$$f(x) = \int_a^b g(t, x) dt$$

Tällaisissa integraaleissa muuttujaa x kutsutaan *parametriksi*.

Tarkastellaan integraalin määrittelemiä funktiota menemättä itse teoriaan. Määritellään ns. *Gammafunktio* kaavalla

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

ja selvitetään millä x :n arvoilla kyseinen integraali suppenee. Aluksi todetaan, että jos $x \geq 1$, on integraali epäoleellinen vain ylärajalla, mutta tapauksessa $x < 1$ integraali on epäoleellinen myös alarajalla.

Tarkastellaan siis aluksi integraalin

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \quad (10.3)$$

suppenemista. Valitaan vertailuintegrandiksi $\frac{1}{t^{1-x}}$, jolloin voidaan todeta, että

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{\frac{1}{t^{1-x}}} = 1.$$

Täten siis integraali (10.3) suppenee tarkalleen silloin kuin

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt \quad (10.4)$$

suppenee, ja esimerkin 101 mukaan (10.4) suppenee tarkalleen silloin kun $1 - x < 1$, mikä on yhtäpitävää ehdon $x > 0$ kanssa.

Tarkastellaan sitten integraalin

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

suppenemista. Tässä yhteydessä vertailuintegrandiksi voidaan valita esimerkiksi $\frac{1}{t^2}$, jolloin todetaan, että

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0.$$

Koska integraali $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ suppenee, suppenee siis myös integraali $\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ vertailutarkastimen nojalla. Täten voidaan siis todeta, että integraali

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

suppenee tarkalleen silloin, kun $x > 0$.

Lause 56. Kun $x > 0$, on $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Todistus. Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int_\varepsilon^M t^x e^{-t} dt = - \int_\varepsilon^M t^x e^{-t} + \int_\varepsilon^M x t^{x-1} e^{-t} dt,$$

mistä väite seuraa, kun annetaan M :n lähestyä ääretöntä ja ε :in nollaa. $\square$

Helposti todetaan, että

$$\Gamma(1) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} \right]_0^M = \lim_{M \rightarrow \infty} -e^{-M} + 1 = 1,$$

joten kokonaisluvuille n pätee

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)\dots 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

Gammafunktio $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ voidaan täten siis nähdä kertomafunktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ yleistyksenä.

Määritetään seuraavaksi arvo $\Gamma(\frac{1}{2})$ ja oletetaan tätä varten tunnetuksi integraali $\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Tällöin

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt,$$

ja sijoitus $t = \frac{x^2}{2}$ antaa

$$\int_0^M t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{\sqrt{2M}} \frac{\sqrt{2}}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x dx = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2M}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

mistä nähdään, että $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Matlab tuntee myös Γ -funktion:

```
>> gamma(1/2)
```

```
ans =
```

```
1.7725
```

```
>>
```

Lause 57. Oletetaan, että funktio $f(x, t)$ ja osittaisderivaatta $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$ ovat jatkuvia, kun $x \in [c, d]$ ja $t \in [a, b]$. Tällöin

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt,$$

kun $t \in [a, b]$.

Todistus. Sivuutetaan.

Esimerkki 109.

$$\frac{d}{dt} \int_1^2 \frac{\sin tx}{x} dx = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin tx}{x} dx = \int_1^2 \cos tx dx = \frac{1}{t} (\sin 2t - \sin t).$$

Voidaan osoittaa, että edellinen lause pätee myös epäoleellisille integraaleille, mikäli suppeneminen täyttää tietyn säännöllisyyssehdon.

Esimerkki 110.

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (t^{x-1} e^{-t}) dt = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \ln t dt,$$

ja voidaan osoittaa, että näin saatu integraali suppenee samoilla x :n arvoilla kuin alkuperäinenkin.