

Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2021

Esimerkki

- Logiikan kaava $(x \geq 1) \wedge (y < 0)$ väittää, että $x \geq 1$ ja $y < 0$.

Esimerkki

- Logiikan kaava $(x \geq 1) \wedge (y < 0)$ väittää, että $x \geq 1$ ja $y < 0$.
- Kaava $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ väittää, että jokainen x toteuttaa ehdon $x^2 \geq 0$.

Esimerkki

- Logiikan kaava $(x \geq 1) \wedge (y < 0)$ väittää, että $x \geq 1$ ja $y < 0$.
- Kaava $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ väittää, että jokainen x toteuttaa ehdon $x^2 \geq 0$.
- Kaava $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ väittää, että on olemassa sellainen x , että kaikille y :ille $y \leq x$

Esimerkki

- Logiikan kaava $(x \geq 1) \wedge (y < 0)$ väittää, että $x \geq 1$ ja $y < 0$.
- Kaava $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ väittää, että jokainen x toteuttaa ehdon $x^2 \geq 0$.
- Kaava $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ väittää, että on olemassa sellainen x , että kaikille y :ille $y \leq x$
- Kaava $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - 3| < \delta \rightarrow |x^2 - 9| < \epsilon)$ väittää, että jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen positiiviluku δ , että ehdosta $|x - 3| < \delta$ seuraa $|x^2 - 9| < \epsilon$.

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\}$

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$
- $\in$ on ns. *kaksipaikkainen relaationsymboli* ja merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$
- $\in$ on ns. *kaksipaikkainen relaationsymboli* ja merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A
- $x \notin A$ tarkoittaa $\neg(x \in A)$

Joukko

Joukko koostuu mistä hyvänsä olioista, mutta on voitava tarkoin määritellä ainakin periaatteessa, kuuluuko jokin olio joukkoon vai ei. Olioita, joista joukko koostuu, kutsutaan alkioiksi.

Merkintöjä

- $A = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$
- $\in$ on ns. *kaksipaikkainen relaationsymboli* ja merkintä $x \in A$ tulkitaan siten, että alkio x kuuluu joukkoon A
- $x \notin A$ tarkoittaa $\neg(x \in A)$
- Merkintä $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ tarkoittaa joukkoa, joka sisältää sellaiset joukon A alkiot x , jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan kaavan $\phi(x)$

Esimerkki

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge x \text{ pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Esimerkki

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \wedge x \text{ pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

Määritelmä

- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ (yhtäsuuruus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ (osajoukko)
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (yhdiste eli unioni)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (leikkaus eli intersektio)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (erotus eli differenssi)
- $A = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A)$ (tyhjä joukko)

Merkitys matematiikalle

- Melkein kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin.

Merkitys matematiikalle

- Melkein kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin. Esimerkiksi voidaan sopia, että $\emptyset \leftrightarrow 0$, $\{\emptyset\} \leftrightarrow 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \leftrightarrow 2$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \leftrightarrow 3$, jne.

Merkitys matematiikalle

- Melkein kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin. Esimerkiksi voidaan sopia, että $\emptyset \leftrightarrow 0$, $\{\emptyset\} \leftrightarrow 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \leftrightarrow 2$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \leftrightarrow 3$, jne.
- Vain yksi relaationsymboli $\in$ tarpeen, muut määritellään siihen perustuen.

Merkitys matematiikalle

- Melkein kaikki matematiikka on palautettavissa joukko-oppiin. Esimerkiksi voidaan sopia, että $\emptyset \leftrightarrow 0$, $\{\emptyset\} \leftrightarrow 1$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \leftrightarrow 2$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \leftrightarrow 3$, jne.
- Vain yksi relaationsymboli $\in$ tarpeen, muut määritellään siihen perustuen.
- Erittäin yksinkertainen teoreettinen perusta matematiikalle.

Tärkeimmät lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- Reaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{R}$, ja
- Kompleksilukujen joukkoa symbolilla $\mathbb{C}$.

Lukuvälit

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli, analogisesti $(a, b]$)
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ (suljettu puolisuora, analogisesti $(-\infty, a]$)
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (avoin puolisuora, analogisesti $(-\infty, a)$)



Gottlob Frege (1848—1925)

- Propositio- ja predikaattilogiikka
- Matematiikan perusteet: Grundgesetze der Arithmetik (vol. 1 (1893), vol. 2 (1903))

Russellin paradoksi (1901)



Bertrand Russell (1872–1970)

Russellin paradoksi (1901)



Bertrand Russell (1872–1970)

Olkoon $A = \{X \mid X \notin X\}$. Onko $A \in A$?

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

Huomautus

Summamerkinnässä 1 on summauksen alaraja, n yläraja ja i summausindeksi. Summausindeksin valinta ei ole tärkeä, vaan

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k$$

Summamerkinnän käsittely

- $$c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$$

Summamerkinnän käsittely

- $c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$

Summamerkinnän käsittely

- $c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i$

Summamerkinnän käsittely

- $c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$

Pascalin kolmio

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
 & & \dots & & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 & & \dots & & & &
 \end{array}$$

Newtonin binomikaava

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Newtonin binomikaava

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Esimerkki

- $(a + b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Newtonin binomikaava

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Esimerkki

- $(a + b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

Rationaaliluvut

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Rationaaliluvut

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Ääretön määrä esityksiä: $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}, n \in \mathbb{Z}$

Rationaaliluvut

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Ääretön määrä esityksiä: $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$, $n \in \mathbb{Z}$
- Tiheä: jos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, on $\frac{a}{b} < \frac{ad + bc}{2bd} < \frac{c}{d}$

Rationaaliluvut

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Ääretön määrä esityksiä: $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}, n \in \mathbb{Z}$
- Tiheä: jos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, on $\frac{a}{b} < \frac{ad + bc}{2bd} < \frac{c}{d}$
- Jos $a, b > 0$, on $Nb \cdot \frac{a}{b} = Na \geq N$.

Pythagoras

Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole rationaalisia ratkaisuja.

Todistus

Tehdään vastaoletus, jonka mukaan yhtälöllä on rationaalinen ratkaisu. Silloin on olemassa myös supistetussa muodossa oleva rationaalinen ratkaisu $\frac{m}{n}$. Voidaan olettaa että $m, n > 0$ ja tällöin

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Todistus

Tehdään vastaoletus, jonka mukaan yhtälöllä on rationaalinen ratkaisu. Silloin on olemassa myös supistetussa muodossa oleva rationaalinen ratkaisu $\frac{m}{n}$. Voidaan olettaa että $m, n > 0$ ja tällöin

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Tästä nähdään että m^2 on parillinen, joten myös m on parillinen, siis $m = 2m_1$, missä $m_1 \in \mathbb{N}$

Todistus

Tehdään vastaoletus, jonka mukaan yhtälöllä on rationaalinen ratkaisu. Silloin on olemassa myös supistetussa muodossa oleva rationaalinen ratkaisu $\frac{m}{n}$. Voidaan olettaa että $m, n > 0$ ja tällöin

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Tästä nähdään että m^2 on parillinen, joten myös m on parillinen, siis $m = 2m_1$, missä $m_1 \in \mathbb{N}$

Sijoittamalla $m = 2m_1$ ylläolevaan yhtälöön nähdään, että

$$(2m_1)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 2m_1^2 = n^2,$$

Todistus

Tehdään vastaoletus, jonka mukaan yhtälöllä on rationaalinen ratkaisu. Silloin on olemassa myös supistetussa muodossa oleva rationaalinen ratkaisu $\frac{m}{n}$. Voidaan olettaa että $m, n > 0$ ja tällöin

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Tästä nähdään että m^2 on parillinen, joten myös m on parillinen, siis $m = 2m_1$, missä $m_1 \in \mathbb{N}$

Sijoittamalla $m = 2m_1$ ylläolevaan yhtälöön nähdään, että

$$(2m_1)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 2m_1^2 = n^2,$$

mistä huomataan että n^2 on parillinen, jolloin myös n on parillinen.

Todistus

Tehdään vastaoletus, jonka mukaan yhtälöllä on rationaalinen ratkaisu. Silloin on olemassa myös supistetussa muodossa oleva rationaalinen ratkaisu $\frac{m}{n}$. Voidaan olettaa että $m, n > 0$ ja tällöin

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Tästä nähdään että m^2 on parillinen, joten myös m on parillinen, siis $m = 2m_1$, missä $m_1 \in \mathbb{N}$

Sijoittamalla $m = 2m_1$ ylläolevaan yhtälöön nähdään, että

$$(2m_1)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 2m_1^2 = n^2,$$

mistä huomataan että n^2 on parillinen, jolloin myös n on parillinen. Tämä on ristiriita, sillä $\frac{m}{n}$ oli supistetussa muodossa.

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?
- Miksi $\sqrt{2}$ on olemassa joukossa $\mathbb{R}$?

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?
- Miksi $\sqrt{2}$ on olemassa joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisua ei ole joukossa $\mathbb{R}$?