

Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2021

Pythagoras

Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole rationaalisia ratkaisuja.

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Onko yhtälöllä $x^2 = -1$ ratkaisua reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$?
- Mistä johtuu eroavaisuus vastauksissa?
- Mitä tarkalleen ottaen ovat reaaliluvut?
- Miksi $\sqrt{2}$ on olemassa joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi yhtälön $x^2 = -1$ ratkaisua ei ole joukossa $\mathbb{R}$?

Reaalilukujen aksiomatisointi

Peruskäsitteet: joukko $\mathbb{R}$, operaatiot $+$ ja $\cdot$, alkioit 0 ja $1 \in \mathbb{R}$.

Kunta-aksioomat:

- 1 Kaikille reaaliluvuille a , b ja c pätee $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- 2 Jokaiselle reaaliluvulle a pätee $0 + a = a$ ja $1 \cdot a = a$.
- 3 Jokaista reaalilukua a kohti on olemassa a :n *vastaluku* $-a$, joka toteuttaa $a + (-a) = 0$ ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua a kohti on olemassa käänteisluku a^{-1} , joka toteuttaa $a \cdot a^{-1} = 1$.
- 4 Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee $a + b = b + a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$.
- 5 kaikille reaaliluvuille a , b , ja c pätee $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Määritelmä (Vähennys- ja jakolasku)

- $a - b = a + (-b)$
- Jos $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisella luvulla voi olla vain yksi vastaluku. Jos nimittäin a :n vastalukuja olisivat sekä a_1 ja a_2 , olisi $a + a_1 = 0 = a + a_2$, mistä voidaan päätellä, että $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = (a_1 + a) + a_2 = 0 + a_2 = a_2$
- Samoin voidaan päätellä että jokaisella $a \neq 0$ voi olla vain yksi käänteisluku.
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$.
- Aksioomissa ei mainita, että kaikille $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 0 = 0$. Tämä on looginen seuraus aksioomista.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 0 = 0)$$

Todistus:

- $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
- $\Rightarrow a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$
- $\Rightarrow 0 = a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-a \cdot 0)) = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$

Reaalilukujen ominaisuuksia

Järjestysaksiomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subsetneq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- 1 Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
- 2 Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b$, $a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Määritelmä

Suuremmuusrelaatio $>$ määritellään seuraavasti:

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+.$$

Relaatio $\geq$ määritellään ehdolla

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Relaatiot $<$ ja $\leq$ määritellään analogisesti.

Lause

Jos $a > b$ ja $b > c$, niin $a > c$.

Todistus:

Ensinnäkin $a > b$ tarkoittaa että $a - b \in \mathbb{R}_+$ ja vastaavasti $b > c$ tarkoittaa että $b - c \in \mathbb{R}_+$.

Järjestysaksioomien mukaan tällöin pätee

$$a - c = \underbrace{a - b}_{\in \mathbb{R}_+} + \underbrace{b - c}_{\in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}_+,$$

mikä puolestaan tarkoittaa että $a > c$.

Tehtävä

Mieti miksi pitää olla $1 \in \mathbb{R}_+$ ja miksi $(-1)a = -a$.

Lause

Jos $a < c$ ja $b < d$, niin $a + b < c + d$.

Todistus. $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$.

Tällöin $c + d - (a + b) = c - a + d - b \in \mathbb{R}_+$, siis

$$a + b < c + d$$

Lause

Jos $0 < a < c$ ja $0 < b < d$, niin $ab < cd$

Todistus: $a < c$ ja $b < d$ tarkoittavat sitä, että $c - a \in \mathbb{R}_+$ ja $d - b \in \mathbb{R}_+$. Lisäksi aiemmin havaitun mukaan ehdoista $0 < a$ ja $a < c$ seuraa $0 < c$, siis $c \in \mathbb{R}_+$. Tällöin

$$cd - ab = cd - cb + cb - ab = c(d - b) + b(c - a) \in \mathbb{R}_+,$$

siis $ab < cd$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Itseisarvo

Määritelmä:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Huomautus

- $|x| \geq 0$.
- $|xy| = |x| |y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- Jos $-|y| \leq x \leq |y|$, niin $|x| \leq |y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Kolmioepähtälö

Epähtälöä $|x + y| \leq |x| + |y|$ kutsutaan *kolmioepähtälöksi*.

Metriikka

Kahden reaaliluvun välinen etäisyys $d(x, y)$ määritellään seuraavasti: $d(x, y) = |x - y|$

Lause

Kaikille reaaliluvuille x , y ja z pätee

- $d(x, y) \geq 0$ ja $d(x, y) = 0$ vain jos $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Lause

Sekä $d(a + b, c + d)$ että $d(ab, cd)$ saadaan miten pieniksi hyvänsä, kunhan $d(a, c)$ ja $d(b, d)$ valitaan riittävän pieniksi.

- $d(a + b, c + d) = |a + b - (c + d)| = |a - c + b - d| \leq |a - c| + |b - d| = d(a, c) + d(b, d)$
- $d(ab, cd) = |ab - cd| = |ab - ad + ad - cd| = |a(b - d) + (a - c)d| \leq |a| |b - d| + |a - c| |d| = |a| d(b, d) + |d| d(a, c).$

Esimerkki

$$d(x^2, 9) = |x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)| = |x + 3| d(x, 3).$$

Jos x on niin lähellä lukua 3 että $d(x, 3) < 1$, on silloin $2 < x < 4$ ja siksi $|x + 3| < 4 + 3 = 7$. Tällöin siis $d(x^2, 9) < 7d(x, 3)$.

Reaalilukujen ominaisuuksia

Huomautus

Myös rationaalilukujen joukko toteuttaa sekä kunta- että järjestysaksioomat. Ratkaisua yhtälöön $x^2 = 2$ ei kuitenkaan ole joukossa $\mathbb{Q}$.

Määritelmä

Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Luku M on joukon A *yläraja*, mikäli $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq M)$
- Luku $S = \sup A$ on joukon A *pienin yläraja*, *supremum*, jos S on yläraja ja

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A)(a > S - \epsilon)$$

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa *pienin yläraja*.

Esimerkki

Rationaalilukujen jono $3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3, 1415; 3, 14159 \dots$ on kasvava jono. Jos oletetaan tunnetuksi, että jono on ylhäältä rajoitettu, on täydellisyysaksiooman perusteella olemassa reaaliluku π joka on mainitun lukujoukon pienin yläraja. Tämä on se reaaliluku, jota edellämainittu rationaalilukujen jono lähestyy.

Huomautus

Jos valitaan mikä hyvänsä jono rationaalilukuja $r_1 < r_2 < r_3 \dots < M$, niin täydellisyysaksiooman nojalla on olemassa sellainen reaaliluku α , jota jono $r_1, r_2, r_3, \dots$ lähestyy. Pienimmän ylärajan ominaisuudesta nimittäin seuraa, että $\forall \epsilon > 0$ $\alpha - \epsilon$ ei ole ko. jonon yläraja, ja siis on olemassa sellainen r_n että $\alpha - \epsilon < r_n < \alpha$.

Esimerkki

Oletetaan (toistaiseksi) tunnetuksi että

$$2 = 1,999999999 \dots$$

- $1^2 = 1$
- $1,4^2 = 1,96$
- $1,41^2 = 1,9881$
- $1,414^2 = 1,999396$
- $1,4142^2 = 1,99996164$
- $1,41421^2 = 1,9999899241$
- $1,414213^2 = 1,999998409369$
- $1,4142135^2 = 1,99999982358225$
- $1,41421356^2 = 1,9999999932878736$

Esimerkki

Kokeilumenettelyllä on mahdollista rakentaa rationaalilukujen jono $1 \leq r_1 < r_2 < r_3 < \dots$, jonka kaikille jäsenille pätee $r_i^2 < 2$ ja $d(r_i^2, 2) = 2 - r_i^2$ saadaan miten pieneksi hyvänsä. Vaihtoehtoisesti voitaisiin määritellä joukko $A = \{r \in \mathbb{Q} \cap [1, 2] \mid r^2 < 2\}$.

Olkoon $\alpha = \sup A$, selvästi $1 < \alpha < 2$. Jos $\alpha^2 < 2$, on olemassa sellainen $r \in A$, että $d(r^2, 2) = 2 - r^2 < 2 - \alpha^2$, mistä seuraa että $r^2 > \alpha^2$ ja edelleen $r > \alpha$. Tämä ei ole mahdollista, koska α on joukon A yläraja.

Jos taas $\alpha^2 > 2$, on $\alpha^2 - 2 > 0$ ja siksi $\beta = \alpha - \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha} < \alpha$. Nyt $\beta^2 = \alpha^2 - (\alpha^2 - 2) + \frac{(\alpha^2 - 2)^2}{4\alpha^2} > 2$ ja jokainen $r \in A$ toteuttaa $r \leq \beta$, sillä muutoin olisi $r^2 > \beta^2 > 2$. Näin ollen myös β on joukon A yläraja, joten α ei ollutkaan pienin yläraja. Tämä on ristiriita. Näin ollen $\alpha^2 = 2$.

Ei ääretöntä alkia

$$M + 1 > M + 0 = M$$

Määritelmä

Luku $\epsilon > 0$ on *infinitesimaali* eli äärettömän pieni, jos $\forall n$

$$n \cdot \epsilon = \underbrace{\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} < 1$$

Ei infinitesimaaleja

Jos olisi $\forall n \ n\epsilon < M$, on joukko $A = \{n\epsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ ylhäältä rajoitettu ja näin ollen sillä on pienin yläraja S . Näin ollen $S - \epsilon$ ei ole joukon yläraja ja siksi $\exists m\epsilon > S - \epsilon$, mistä seuraa $(m+1)\epsilon > S$. Mutta $(m+1)\epsilon \in A$, joten S ei olekaan joukon yläraja.

Seurauksia

- Jokaisella välillä (a, b) on rationaaliluku r ja irrationaaliluku α
- Desimaaliesitys
- Rationaaliset approksimaatiot.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ sanotaan reaalifunktioksi, jos f on määritelty jossakin joukossa $A \subseteq \mathbb{R}$ ja saa arvonsa jossakin joukossa $B \subseteq \mathbb{R}$. Jos $f(x) = y$, sanotaan, että x on y :n *alkukuva*, ja y on x :n *kuva*.

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
- Funktio on *surjektiivinen*, jos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$.
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

Lause

Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektiivinen.

Määritelmä

Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ (reaali)funktioita. Tällöin $g \circ f : A \rightarrow C$ on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota g kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota f *sisäfunktioksi*.

Esimerkki

Jos $f(x) = -x^2$ ja $g(x) = e^x$, on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}.$$

Määritelmä

Olkoon $f : A \rightarrow B$ (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio $g : B \rightarrow A$, että $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$ ja $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$, sanotaan että g on f :n *käänteisfunktio* ja merkitään $g = f^{-1}$.

Lause

- Funktiolla $f : A \rightarrow B$ on olemassa käänteisfunktio $f^{-1} : B \rightarrow A$ tarkalleen silloin kun f on bijektiivinen.
- Jos funktio on (aidosti) kasvava/vähenevä, niin myös sen käänteisfunktio on.