

# Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo  
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2021

## Määritelmä

Funktiota  $f : A \rightarrow B$  sanotaan reaalifunktioksi, jos  $f$  on määritelty jossakin joukossa  $A \subseteq \mathbb{R}$  ja saa arvonsa jossakin joukossa  $B \subseteq \mathbb{R}$ . Jos  $f(x) = y$ , sanotaan, että  $x$  on  $y$ :n *alkukuva*, ja  $y$  on  $x$ :n *kuva*.

## Määritelmä

Olkoon  $f : A \rightarrow B$  (reaali)funktio

- Funktio on *injektiivinen*, jos  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .
- Funktio on *surjektiivinen*, jos  $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$ .
- Funktio on *bijektiivinen*, jos se on sekä injektiivinen että surjektiivinen.

## Luonnehdinta

Injektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran. Surjektiivisen funktion kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa ainakin kerran.

## Määritelmä

- Reaalifunktio on (aidosti) *kasvava*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *vähenevä*, jos
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$
- Reaalifunktio on (aidosti) *monotoninen*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

## Lause

Aidosti monotoninen reaalifunktio on injektiivinen.

## Määritelmä

Olkoot  $f : A \rightarrow B$  ja  $g : B \rightarrow C$  (reaali)funktioita. Tällöin  $g \circ f : A \rightarrow C$  on *yhdistetty funktio*, joka määritellään

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tässä merkinnässä funktiota  $g$  kutsutaan *ulkofunktioksi* ja funktiota  $f$  *sisäfunktioksi*.

## Esimerkki

Jos  $f(x) = -x^2$  ja  $g(x) = e^x$ , on

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{-x^2}.$$

## Määritelmä

Olkoon  $f : A \rightarrow B$  (reaali)funktio. Jos on olemassa sellainen (reaali)funktio  $g : B \rightarrow A$ , että  $(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$  ja  $(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$ , sanotaan että  $g$  on  $f$ :n *käänteisfunktio* ja merkitään  $g = f^{-1}$ .

## Lause

- Funktiolla  $f : A \rightarrow B$  on olemassa käänteisfunktio  $f^{-1} : B \rightarrow A$  tarkalleen silloin kun  $f$  on bijektiivinen.
- Jos funktio on (aidosti) kasvava/vähenevä, niin myös sen käänteisfunktio on.

## Esimerkki

Funktio  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(x) = x^2$  on bijektio. Sen käänteisfunktio on  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .

## Esimerkki

Funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x$  on bijektio. Sen käänteisfunktio on  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ .

## Esimerkki

Funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  ei ole injektio, eikä surjektio. Näin ollen sillä ei ole käänteisfunktiota.

# Reaalifunktiot

## Polynomifunktiot

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots a_nx^n,$$

missä  $a_i \in \mathbb{R}$ .

## Rationaalifunktiot

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä  $p$  ja  $q$  ovat polynomeja. Rationaalifunktio ei ole määritelty sellaisille reaaliluvuille, joille  $q(x) = 0$ .

## Esimerkkejä

- $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$  esittää polynomifunktiota
- $r(x) = \frac{1+x}{1-x}$  esittää rationaalifunktiota, joka on määritelty kun  $x \neq 1$ .

## Eksponenttifunktiot

Kun  $a \in \mathbb{R}_+$  ja  $n \in \mathbb{N}$ , määritellään

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$$

Selvästi

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{ja} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Miten pitää määritellä  $a^0$ ?

$$a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0.$$

Tästä seuraa, että  $a^0 = 1$ .

## Eksponenttifunktiot

Miten pitää määritellä  $a^{-n}$ , kun  $n \in \mathbb{N}$ ?

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n}a^n,$$

josta

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}.$$

## EkspONENTTIFUNKTIOT

Miten pitää määritellä  $a^r$ , kun  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ?

Pitäisi olla

$$(a^r)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

## MÄÄRITELMÄ

Olkoon  $b > 0$ . Luvun  $b$   $n$ :s juuri on positiivinen reaaliluku  $\beta$ , joka toteuttaa yhtälön  $\beta^n = b$ . Tätä merkitään symbolilla  $\beta = \sqrt[n]{b}$ .

Edellämainitun perusteella pitää määritellä

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

(Mieti mistä viimeisin yhtäsuuruus johtuu)

## Eksponenttifunktio

Jos  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , miten  $a^x$  pitää määritellä? On mahdollista valita rationaalilukujono  $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots$  jolle  $x = \sup\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$  ja määritellä  $a^x = \sup\{a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots\}$

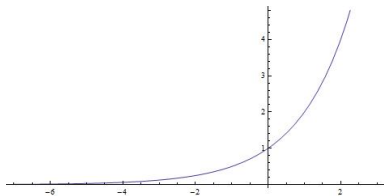
## Eksponenttifunktio

Edellä kuvatulla menettelyllä voidaan määritellä funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = a^x$

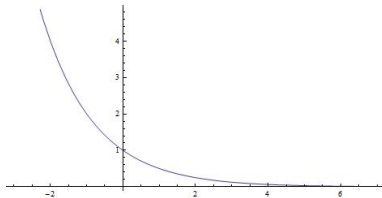
## Ominaisuuksia

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- Jos  $0 < a < 1$ , on  $f$  aidosti vähenevä ja  $f$ :n arvot lähestyvät nollaa kun  $x$  kasvaa rajatta mutta kasvavat rajatta kun  $x$  pienenee rajatta
- Arvoilla  $a > 1$   $f$  on aidosti kasvava ja  $f$ :n arvot lähestyvät nollaa kun  $x$  pienenee rajatta ja  $f$ :n arvot kasvavat rajatta kun  $x$  kasvaa rajatta
- Molemmissa tapauksissa bijektio.
- Jos  $b = a^c$ , on  $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$

$$y = 2^x$$



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



## Logaritmi

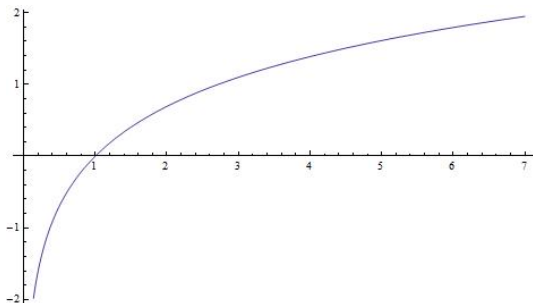
Logaritmifunktio  $\log_a \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  määritellään eksponenttifunktion käänteisfunktiona:

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

Logaritmifunktio toteuttaa ehdot

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$ .
- Jos  $b = a^c$ , on  $b^x = (a^c)^x = a^{cx}$  ja siis
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{c}$

$$y = \ln x = \log_e x, \quad e = 2,71828182845904523536 \dots$$



## Esimerkki

Kuinka suureksi  $x$  pitää valita, että  $2^x > 10^9$ ?

Koska eksponenttifunktio  $f(x) = 2^x$  on aidosti kasvava ja  $\log_2$  tämän käänteisfunktiona niinkään aidosti kasvava, voidaan epäyhtälöstä päätellä  $\log_2(2^x) > \log_2(10^9)$ , mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x > 9 \log_2(10) = 29.897 \dots$$

## "Määritelmä"

Ympyräsektorin kulman suuruus on sektorin kaaren pituus jaettuna säteen pituudella. Tällöin kulma  $x$  (asteissa) voidaan muuntaa kulmaksi  $y$  (radiaaneissa) seuraavasti:  $y = \frac{\pi}{180}x$ . Suoran kulman suuruus on siis  $\frac{\pi}{2}$ , oikokulman  $\pi$  ja täyden ympyrän  $2\pi$ .