

# Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo  
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2021

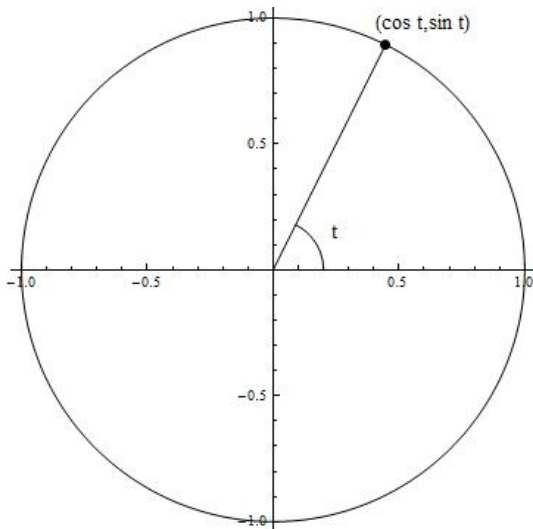
## "Määritelmä"

Ympyräsektorin kulman suuruus on sektorin kaaren pituus jaettuna säteen pituudella. Tällöin kulma  $x$  (asteissa) voidaan muuntaa kulmaksi  $y$  (radiaaneissa) seuraavasti:  $y = \frac{\pi}{180}x$ . Suoran kulman suuruus on siis  $\frac{\pi}{2}$ , oikokulman  $\pi$  ja täyden ympyrän  $2\pi$ .

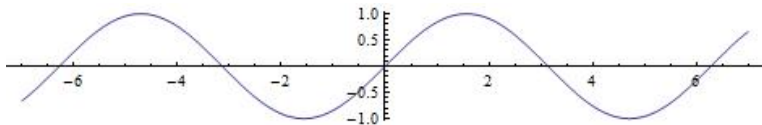
## "Määritelmä"

Kulman, joka kiertyy positiiviselta  $x$ -akselilta myötäpäivään *kehäpiste* on origokeskisen yksikköympyrän ja kulman vasemman kyljen leikkauspiste. Tämän kulman *sini* on kehäpisteen  $y$ -koordinaatti ja *kosini*  $x$ -koordinaatti.

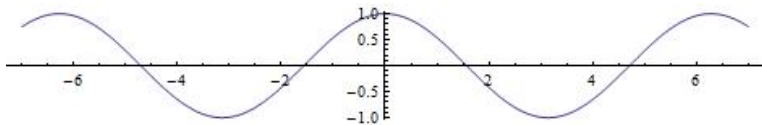
# Trigonometriset funktiot



# Trigonometriset funktiot



$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

## Jaksollisuus

$$\sin x = \sin(x + 2\pi n) \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

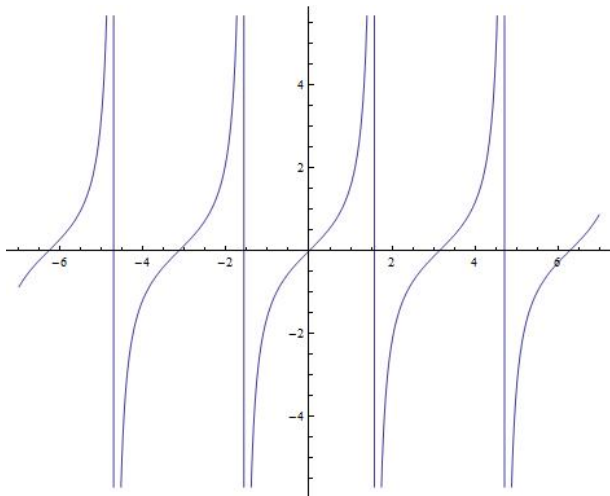
## Nollakohdat

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

## Trigonometriset kaavat

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ , jne.

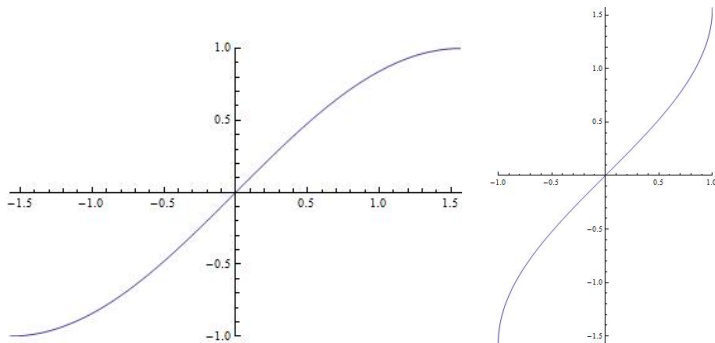
# Trigonometriset funktiot



$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

# Trigonometriset funktiot

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1] \quad \sin^{-1} : [0, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



## Käänteisfunktiot

- Funktion  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$  käänteisfunktio on nimeltään *arkussini*, merkitään  $\arcsin$  tai  $\sin^{-1}$ .
- Funktion  $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \cos x$  käänteisfunktio on nimeltään *arkuskosini*, merkitään  $\arccos$  tai  $\cos^{-1}$ .
- Funktion  $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \tan x$  käänteisfunktio on nimeltään *arkustangentti*, merkitään  $\arctan$  tai  $\tan^{-1}$ .



## Lause

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $|\sin x| \leq |x|$
- $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|, \end{aligned}$$

siis  $d(\sin x, \sin y) \leq d(x, y)$ . Samoin  $d(\cos x, \cos y) \leq d(x, y)$ .

# Algebralliset funktiot

Kahden muuttujan polynomi yhtälö  $P(x, y) = 0$  saattaa määritellä funktion  $f : A \rightarrow B$ ,  $y = f(x)$  kunhan joukot  $A$  ja  $B$  valitaan sopivasti. Tällaisia funktioita sanotaan *algebrallisiksi*. Tällöin siis  $x$  on alkukuva ja  $y$  on kuva.

## Esimerkki

Polynomi yhtälö  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  määrittelee yksikköympyrän. Mikäli valitaan  $A = [-1, 1]$  ja  $B = [0, \infty)$ , saadaan aikaan funktio  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ .

## Esimerkki

Polynomi yhtälö  $x^2 - y^2 = 0$  voidaan kirjoittaa muotoon  $(x - y)(x + y) = 0$ , mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että  $x = y$  tai  $x = -y$ . Jos nyt valitaan  $A = \mathbb{R}$  ja  $B = [0, \infty)$ , saadaan funktio  $f(x) = \sqrt{x^2}$ .

## Esimerkki

Määritellään

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{jos } x < 0 \\ x, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$

## Esimerkki

Määritellään *signum*-funktio ehdoilla

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos } x < 0 \\ 0 & \text{jos } x = 0 \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

## Rationaaliset operaatiot

- Vakiolla kertominen
- Yhteen- ja vähennyslasku
- Kerto- ja jakolasku

## Määritelmä

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.