

Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2021

Rationaaliset operaatiot

- Vakiolla kertominen
- Yhteen- ja vähennyslasku
- Kerto- ja jakolasku

Määritelmä

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.

Esitysmuotoja (yksikköympyrä)

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$
- Parametrimuoto $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$

Itseisarvo

- Eksplisiittimuoto: $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$
- Implisiittimuoto: $x^2 - y^2 = 0, y \geq 0$.
- Parametrimuoto: $\{(t, \operatorname{sgn}(t)t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Differentiaali- ja integraalilaskenta

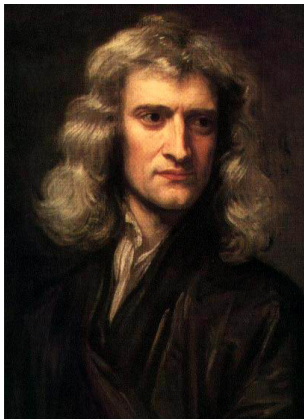


Arkhimedes (n. 287–212 eKr)

Määritti pinta-aloja ja tilavuuksia itse kehittämänsä varhaisen integraalilaskennan avulla



René Descartes (Renatus Cartesius, 1596–1650)
Geometrian ja algebran yhdistäminen.



Sir Isaac Newton (1642–1727)

Differentiaali- ja integraalilaskenta fysiikkaa varten



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Differentiaali- ja integraalilaskenta "periaatteen vuoksi"



Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)
Differentiaali- ja integraalilaskennan modernisointi

Matemaattinen merkitys

- Differentiaalilaskenta: Suureen ja sen muutoksen samanaikainen käsittely
- Integraalilaskenta: Objektin esittäminen pistemäisten osiensa summana

Yhteiskunnallinen merkitys

- Luonnontieteiden kehitys
- Tekniikan kehitys
- Maailmankuvan kehitys

"Määritelmä"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y , mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat lähelle lukua y , jos x valitaan läheltä lukua x_0 .

Esimerkki

Olkoon $\varepsilon > 0$ pieni positiiviluku ja $f(x) = 2x$. Jos nyt valitaan x läheltä lukua 5, on uskottavaa, että $f(x)$ on lähellä lukua 10.

Muodollisesti tämä nähdään seuraavasti:

$$d(f(x), 10) = |2x - 10| = 2|x - 5| = 2d(x, 5).$$

Jos nyt valitaan x niin läheltä lukua 5 että $d(x, 5) < \frac{1}{2}\varepsilon$, seuraa tästä että $d(f(x), 10) = 2d(x, 5) < 2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Tämä merkitsee sitä että $f(x)$ saadaan niin lähelle lukua 10 kuin halutaan: Etäisyys $< \varepsilon$ kunhan x :n etäisyys luvusta 5 valitaan pienemmäksi kuin $< \frac{1}{2}\varepsilon$.

"Määritelmä 2"

Reaalifunktion $f(x)$ raja-arvo pisteessä x_0 on y , mikäli funktion $f(x)$ arvot tulevat *mielivaltaisen* lähelle lukua y , jos x valitaan *riittävän* läheltä lukua x_0 .

Huomautus

Attribuutti "läheltä" tarkoittaa sitä, etäisyys $d(f(x), y)$ tai $d(x, x_0)$ on pieni. "Mielivaltaisen läheltä" voidaan puolestaan ilmaista sanomalla, että kaikille $\varepsilon > 0$, etäisyys $d(f(x), y)$ toteuttaa $d(f(x), y) < \varepsilon$, kunhan x on riittävän lähellä lukua x_0 , (siis kunhan $d(x, x_0)$ on riittävän pieni).

Määritelmä

Pisteen $x_0 \in \mathbb{R}$ (*avoin*) *ympäristö* on avoin väli (a, b) , joka sisältää pisteen x_0 .

Raja-arvo

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 avoimessa ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$$
$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_\epsilon \rightarrow d(f(x), y) < \epsilon).$$

ja sanotaan, että reaalifunktion f *raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$.

Raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ voidaan merkitä myös $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y$.

Huomautus

Raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

on yksikäsitteinen eikä riipu arvosta $f(x_0)$ (mikäli edes olemassa)

Helposti todettavissa:

Jos $c \neq 0$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, on $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA$. Perustelu: Koska

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, on $d(f(x), A) < \frac{\epsilon}{|c|}$, kunhan $d(x, x_0) \leq \delta = \delta_{\frac{\epsilon}{|c|}}$.

Tällöin

$$\begin{aligned} d(cf(x), cA) &= |cf(x) - cA| = |c| |f(x) - A| = |c| d(f(x), A) \\ &< |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon, \end{aligned}$$

kunhan $d(x, x_0) \leq \delta$.

Määritelmä

Funktio f on *rajoitettu* joukossa I jos on olemassa sellainen positiiviluku M , että $|f(x)| \leq M$ aina, kun $x \in I$

Lause

Jos funktiolla f on raja-arvo $A \in \mathbb{R}$ pisteessä x_0 , siis $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, niin silloin funktio f on rajoitettu jossakin pisteen x_0 ympäristössä.

Lause

Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, on olemassa sellainen x_0 :n ympäristö I , että $f(x) > \frac{A}{2} > 0$ aina kun $x \in I$.

Lause

Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ja $c \in \mathbb{R}$. Seuraavat raja-arvojen laskusäännöt pätevät:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = AB$.
- Jos $B \neq 0$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
- Jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ ja $\lim_{x \rightarrow y} g(x) = z$, niin $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = z$.

Esimerkki

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x + 3} &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 3} \\ &= \frac{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1}{1 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ?$$