

Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2021

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Esimerkki

Raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$ ei ole olemassa.

Jos nimittäin $x > 2$, voidaan kirjoittaa $x = 2 + \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{\epsilon} > 0$, ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä suurempi on $\frac{1}{\epsilon}$.
Toisaalta, jos $x < 2$ voidaan kirjoittaa $x = 2 - \epsilon$ ja $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{\epsilon} < 0$ ja mitä pienemmäksi $\epsilon > 0$ valitaan, sitä pienempi on $-\frac{1}{\epsilon}$.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä mahdollisesti pistettä x_0 lukuunottamatta.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$
$$\Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta_M > 0)(0 < d(x, x_0) < \delta_M \rightarrow f(x) > M)$$

Tällöin sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön.*

Huomautus

Raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

sekä vastaavat symbolin $-\infty$ sisältävät raja-arvot määritellään analogisesti.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

sillä $\frac{1}{x^2} > M$, kun $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Jos siis $d(0, x) = |x - 0| = |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta_M$, on $\frac{1}{x^2} > M$.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$$

ei ole olemassa myöskään äärettömänä.

Jos olisi (∞) , pitäisi olla $\frac{1}{x-2} > 100$ aina, kun $d(x, 2) < \delta_{100}$. Näin ei voi olla, sillä arvoilla $x < 2$ on $\frac{1}{x-2} < 0$.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jollakin avoimella välillä (x_0, b) .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = y \\ \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)((0 < d(x, x_0) < \delta) \wedge (x > x_0) \\ \rightarrow d(f(x), y) < \epsilon). \end{aligned}$$

Tällöin sanotaan, että funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0 on $y \in \mathbb{R}$. Tätä merkitään myös symbolilla $f(x_0+)$.
Vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = y$ määritellään analogisesti ja merkitään $f(x_0-)$. Oikean- ja vasemmanpuoleiset äärettömät raja-arvot määritellään ilmeisellä tavalla.

Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jossakin pisteen x_0 ympäristössä. f on *jatkuva* pisteessä x_0 , jos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & \text{jos } x \neq 2 \\ 0, & \text{jos } x = 2. \end{cases}$$

on koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty reaalifunktio, ei jatkuva pisteessä $x = 2$.

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1}, & \text{jos } x \neq 1 \\ 3, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

on jatkuva pisteessä $x = 1$.

Määritelmä

Funktio f on *jatkuva välillä* $I = [a, b]$, jos f on jatkuva jokaisessa I :n pisteessä.

Esimerkki

Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ määritelty seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

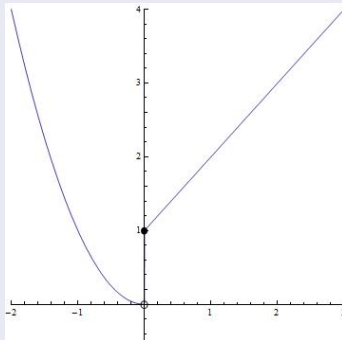
Funktio f ei ole jatkuva missään pisteessä $x \in \mathbb{Q}$.

Määritelmä

- Olkoon f määritelty jollakin välillä $[x_0, b)$ ja
 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f on oikealta jatkuva pisteessä x_0 .
- Olkoon f määritelty jollakin välillä $(a, x_0]$ ja
 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$. Tällöin sanotaan, että f on vasemmalta jatkuva pisteessä x_0 .

Määritellään $f(x)$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x < 0, \\ x + 1, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$



Pisteessä $x = 0$ oikealta jatkuva, vasemmalta epäjatkuva.

Lause

Olko $f(x)$ ja $g(x)$ jatkuvia joukossa I . Tällöin myös $f \pm g$, ja fg ovat jatkuvia joukossa I ja $\frac{f}{g}$ on jatkuva joukossa $I \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$. Lisäksi $f \circ g$ on jatkuva määrittelyjoukossaan.

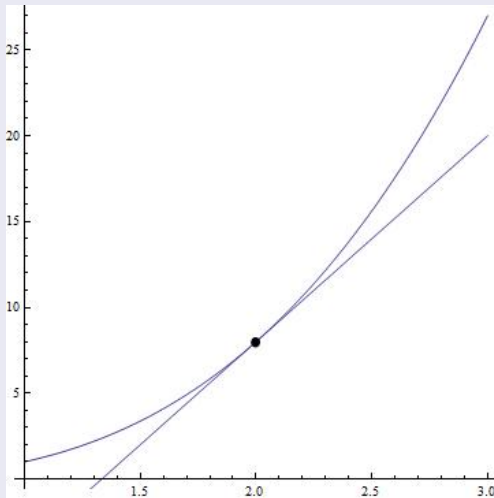
Muistutus

Alkeisfunktioita ovat sekä algebralliset funktiot, että eksponentti- ja logaritmifunktiot, sekä trigonometriset funktiot ja näiden käänteisfunktiot, sekä edellä mainituista yhdistämällä ja rationaalisin operaatioin saadut funktiot.

Lause

Kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

Lineaarinen approksimaatio monimutkaisemmalle funktiolle



Lineaarinen approksimaatio monimutkaisemmalle funktiolle

$$f(x) \approx kx + b$$

ja lisäksi

$$f(x_0) = kx_0 + b$$

Koordinaatiston siirto

Merkitään $x = x_0 + h$, jolloin

$$f(x_0 + h) \approx k(x_0 + h) + b = kh + kx_0 + b = kh + f(x_0),$$

siis

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx kh$$

Määritelmä

Reaalifunktio f on derivoituva pisteessä x , jos on olemassa $k \in \mathbb{R}$ ja funktio $\epsilon(h)$, jolle $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$ siten, että

$$f(x + h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h).$$

Lukua k sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitään $k = f'(x)$. Funktio f on siis derivoituva pisteessä x , jos sitä voidaan x :n ympäristössä approksimoida "riittävän hyvin" lineaarisella funktiolla.

Huomautus

Lähellä nollaa olevilla h :n arvoilla on ns. jäännöstermi $h\epsilon(h)$ pienempi kuin kh . Huomaa lisäksi, että jos $|h| < 1$, on $|h^2| < |h|$, $|h^3| < |h^2|$, ... jne.

Esimerkki

Jos $f(x) = x^3$, on

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 \\ &= 3x^2h + h \underbrace{(3xh + h^2)}_{\epsilon(h)} \end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$, joten $f'(x) = 3x^2$.

Huomautus

$$f(x+h) - f(x) = kh + h\epsilon(h) \Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k + \epsilon(h),$$

josta nähdään, että

$$k = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Määritelmä 2

Funktio f on derivoituva pisteessä x , jos raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa (äärellisenä).

Määritelmä

Funktion keskimääräinen kasvunopeus k välillä $[x, x + h]$ on funktion arvon muutos suhteessa x :n muutokseen h :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = k \Rightarrow f(x + h) - f(x) = kh$$

Esimerkki

Jos $f(x) = kx + b$, on

$$f(x + h) - f(x) = k(x + h) + b - (kx + b) = kh$$

Määritelmä

Jos funktio f on derivoituva pisteessä x , on

$$f(x + h) - f(x) = kh + h\epsilon(h)$$

ja siksi funktion f kasvunopeus pisteessä x määritellään $k = f'(x)$.