

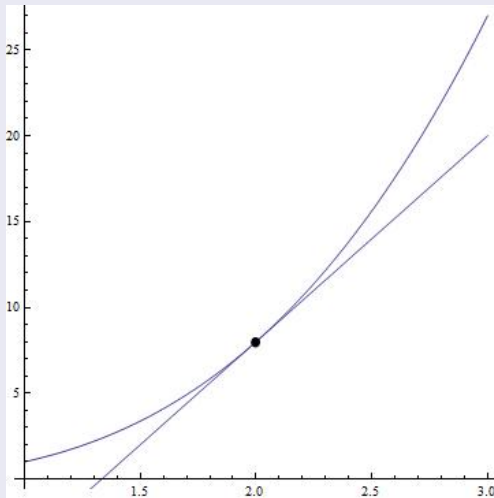
# Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo  
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2021

## Lineaarinen approksimaatio monimutkaisemmalle funktiolle



## Määritelmä

Reaalifunktio  $f$  on derivoituva pisteessä  $x$ , jos on olemassa  $k \in \mathbb{R}$  ja funktio  $\epsilon(h)$ , jolle  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$  siten, että

$$f(x + h) - f(x) = k \cdot h + h\epsilon(h).$$

Lukua  $k$  sanotaan funktion  $f$  derivaataksi pisteessä  $x$  ja merkitään  $k = f'(x)$ . Funktio  $f$  on siis derivoituva pisteessä  $x$ , jos sitä voidaan  $x$ :n ympäristössä approksimoida "riittävän hyvin" lineaarisella funktiolla.

## Huomautus

Lähellä nollaa olevilla  $h$ :n arvoilla on ns. jäännöstermi  $h\epsilon(h)$  pienempi kuin  $kh$ . Huomaa lisäksi, että jos  $|h| < 1$ , on  $|h^2| < |h|$ ,  $|h^3| < |h^2|$ , ... jne.

## Huomautus

$$f(x+h) - f(x) = kh + h\epsilon(h) \Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k + \epsilon(h),$$

josta nähdään, että

$$k = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

## Määritelmä 2

Funktio  $f$  on derivoituva pisteessä  $x$ , jos raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa (äärellisenä).

## Määritelmä

Jos funktio  $f$  on derivoituva pisteessä  $x$ , on

$$f(x + h) - f(x) = kh + h\epsilon(h)$$

ja siksi funktion  $f$  kasvunopeus pisteessä  $x$  määritellään  $k = f'(x)$ .

## Lause

Jos  $f$  on derivoituva pisteessä  $x_0$ , on se myös jatkuva pisteessä  $x_0$ .

## Määritelmä

Jos  $f$  on derivoituva (avoimen) välin  $I$  jokaisessa pisteessä, sanotaan, että  $f$  on derivoituva välillä  $I$ . Funktiota  $x \mapsto f'(x)$  sanotaan  $f$ :n *derivaattafunktioksi*.

Derivaattafunktiosta käytetään  $f'(x)$ :n lisäksi merkintöjä  $Df(x)$ ,  $D_x f(x)$ ,  $\frac{d}{dx} f(x)$ ,  $\frac{df}{dx}$  ja mikäli merkitään  $y = f(x)$ , myös merkinnät  $\frac{dy}{dx}$  ja  $y'$  ovat tavallisia. Jos tuntemattomia on useita ja ainoastaan  $x$ :n muutosta tarkastellaan, käytetään osittaisderivaattamerkintää  $\frac{\partial f}{\partial x}$  tai  $D_x f(x)$ .

## Historiaa

### Leibnitzin merkintä

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

sisältää differentiaalilaskennan varhaisvaiheissa vallineen ajatuksen "äärettömän pienten" suureiden  $dy$  ja  $dx$  osamäärästä,  $dx$  ja  $dy = f(x + dx) - f(x)$  ovat äärettömän pieniä (infinitesimaalisia) lisäyksiä  $x$ :lle ja  $y$ :lle.

Nykyisessä (standardimuotoisessa) differentiaalilaskennassa merkintä  $\frac{dy}{dx}$  ei ole osamäärä, vaan ainoastaan derivaatan merkintätapa.

## Esimerkki

Merkintöjen  $\frac{df}{dx}$  ja  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ero, kun  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ja  $y = 3x^2$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = 2x + \frac{d}{dx}9x^4 = 2x + 36x^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$$

## Esimerkki

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = ?$$

## Lause: Vakiofunktion derivaatta

Jos  $f(x) = c$  on vakio välillä  $I$ , niin  $f'(x) = 0$  välillä  $I$ .

## Todistus

$$f(x + h) - f(x) = c - c = 0 \cdot h.$$

## Lause: Summan ja tulon derivointi

- $D(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$
- $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

## Lause: Ketjusääntö

Olkoon  $f(x)$  derivoituva välillä  $I$  ja  $g(x)$  derivoituva välillä  $f(I)$ .  
Tällöin  $g \circ f$  on derivoituva välillä  $I$  ja

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

## Huomautus

Jos merkitään  $y = f(x)$  ja  $z = g(y) = g(f(x))$ , voidaan ketjusääntö esittää Leibnitzin merkinnöillä seuraavasti:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

## Esimerkki

Koska

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

on

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{f(x)^2} f'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

kunhan  $f(x) \neq 0$ .

## Lause: Osamäärän derivaatta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} (f(x)g(x)^{-1}) = f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\frac{d}{dx} g(x)^{-1} \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \left( -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x) \right) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Lause: Potenssifunktion derivaatta

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1},$$

kun  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Todistus

Jos  $k = 0$ , on  $x^0 = 1$  ja väite seuraa suoraan.

Jos  $k > 0$ , on

$$\begin{aligned}(x+h)^k - x^k &= x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \dots + h^k - x^k \\&= kx^{k-1}h + \binom{k}{2}x^{k-2}h^2 + \dots + h^k \\&= kx^{k-1}h + h \underbrace{\left( \binom{k}{2}x^{k-2}h^1 + \dots + h^{k-1} \right)}_{\epsilon(h)}.\end{aligned}$$

Jos  $k < 0$ , merkitään  $x^k = (\frac{1}{x})^{-k}$  ja käytetään aiempia tuloksia.

## Lause: Käänteisfunktio

Jos  $f$  on injektiivinen jossakin pisteen  $x$  ympäristössä  $I$ , derivoituva pisteessä  $x$  ja  $f'(x) \neq 0$ , on käänteisfunktio  $f^{-1}$  on derivoituva pisteessä  $y = f(x)$  ja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

## "Todistus"

Koska

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

saadaan ketjusäännöllä

$$Df^{-1}(f(x))f'(x) = 1.$$

## Sinifunktion derivaatta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin x) \\ = & \frac{1}{h} \cdot 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} \\ = & \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x. \end{aligned}$$

## Muita derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x,$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x,$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x.$
- $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

## Yleinen potenssifunktio

$$\frac{d}{dx} x^\alpha?$$