

# Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo  
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2021

# Eksplisiitti, implisiitti- ja parametrimuoto

## Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

## Implisiittimuoto

$$x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$$

## Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$$

## Eksplisiittimuoto

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

## Implisiittimuoto

Yhtälö  $x^2 + y^2 = 1$  määrittelee käyrän  $\mathbb{R}^2$ :ssa. Käyrän osa, jossa  $y \geq 0$  määrittelee funktion  $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Derivoimalla implisiittisesti saadaan

$$2x + 2yy' = 0,$$

josta

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

## Parametrimuoto

$$\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\},$$

missä

$$f(\cos t) = \sin t,$$

josta  $t$ :n suhteen derivoimalla saadaan

$$f'(\cos t)(-\sin t) = \cos t.$$

Tästä

$$f'(\cos t) = -\frac{\cos t}{\sin t}.$$

## Parametrimuoto

Yleisesti

$$f(x(t)) = y(t),$$

josta derivoimalla  $t$ :n suhteen saadaan

$$f'(x(t))x'(t) = y'(t)$$

ja siis

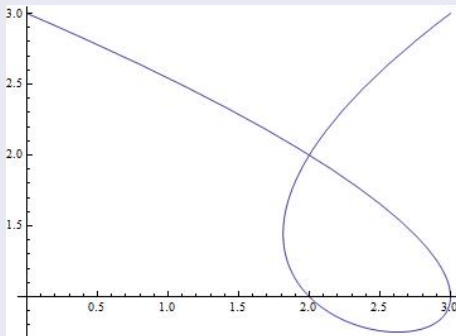
$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Leibnitzin merkinnöillä voidaan siis kirjoittaa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

## Esimerkki

$$A = \{(t^3 - 2t^2 + 3, t^2 - t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



Funktio pisteen (2, 1) ympäristössä.  $f'(2)$ ?

## Esimerkki

$$x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 3y^4 = 37$$

pisteen  $(1, 2)$  ympäristössä.



## Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta:  $D^2f(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ ,  $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta:  $D^3f(x)$ ,  $f'''(x)$ ,  $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ ,  $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ ,  $\frac{d^3y}{dx^3}$
- $n$ -kertainen derivaatta:  $D_x^n f(x)$ ,  $f^{(n)}(x)$ ,  $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ ,  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n}$

## Osittaisderivaatat:

- $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  
 $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ , jne.
- $D_x^2 f$ ,  $D_{yx} f$ ,  $D_{xy} f$ ,  $D_y^2 f$  jne.

## Esimerkki

- $D \sin x = \cos x$ ,  $D^2 \sin x = -\sin x$ ,  $D^3 \sin x = -\cos x$  ja  $D^4 \sin x = \sin x$ ,  $D^5 \sin x = \cos x$ , jne.
- $De^x = e^x$ ,  $D^2 e^x = e^x$ ,  $D^3 e^x = e^x$ , jne.

## Esimerkki

Jos  $f(x, y) = x \sin(xy)$ , on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \sin(xy) + x \cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) &= \cos(xy)x + x \cos(xy) - xy \sin(xy)x \\ &= 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy). \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x^2 \cos(xy)$$

ja

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy).$$

## Huomautus

Mahdollisesti

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Derivointijärjestyksen voi kuitenkin vaihtaa, jos  $f$  on riittävän säännöllinen (toisen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia).

# Antiderivaatta

## Määritelmä

Jos  $F'(x) = f(x)$ , sanotaan, että  $F(x)$  on funktion  $f(x)$  antiderivaatta (kantafunktio, primitiivifunktio, määräämätön integraali)

## Esimerkki

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{n+1} (n+1) x^n = x^n.$$

## Huomautus

Jos  $F(x)$  on  $f(x)$ :n antiderivaatta ja  $C$  vakio, on

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}C = f(x) + 0 = f(x),$$

joten myös  $F(x) + C$  on antiderivaatta.

## Määritelmä

Funktion  $f(x)$  antiderivaatoista käytetään merkintää

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

ja  $f(x)$ :ää kutsutaan integrandiksi.

## Huomautus

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

ja

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

## Huomautus

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \text{ jos } n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$



## Huomautus

Tulon derivointisääntö  $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  ei tuota helppoa sääntöä tulon antiderivaatalle, mutta siitä seuraa, että

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx.$$

## Osittaisintegrointi

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

## Esimerkkejä

- $\int \ln x \, dx$
- $\int x \sin x \, dx$
- $\int x^2 e^x \, dx.$

## Sijoitus määräämättömään integraaliin

Jos  $F$  on  $f$ :n antiderivaatta, on

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t),$$

josta

$$\int f(g(t))g'(t) dt = F(g(t)).$$