Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2021

Radioaktiivinen hajoaminen

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Esimerkki

- $x_0 = 0610.2021$
- $x_1 = \cos x_0 = 0.7430866633486318\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.7363837443779227\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.7409021222823805\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.7378599681703514\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.739909864226433\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.7385293331921988\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.7394594126204263\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.7388329623439876\ldots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.7392549750463257\ldots$
- $x_{10} = \cos x_9 = 0.7389707150552631\ldots$

Esimerkki

$$x = 0.739085133215160641655312087 67\ldots.$$

on yhtälön $x = \cos x$ ratkaisu.

Likimääräinen ratkaisu

- Haarukointimenetelmä (binary search)
- Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$, joten h kannattaa valita
$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$
- $x + h = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ voi siis olla x:ää parempi likiarvo nollakohdalle.

Newtonin menetelmä

- Valitse alkulikiarvo x_0
- Aseta $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Esimerkki

Valitaan $N > 0$ ja sovelletaan Newtonin menetelmää funktioon $f(x) = x^2 - N$

Määritelmä

- Jos $f(x_f) = x_f$, sanotaan, että x_f on funktion f kiintopiste
- Jos on olemassa $c \in (0,1)$ ja väli I, jolle pätee $f(I) \subset I$ ja $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ aina, kun x, $y \in I$, sanotaan, että f on kutistava kuvaus välillä I.

Kiintopistelause

Jos f on kutistava kuvaus välillä I, on f:llä myös kiintopiste $x_f \in I$. Mikä hyvänsä jono $x_0 \in I$, $x_{i+1} = f(x_i)$ lähestyy kiintopistettä x_f.

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I. (Seuraa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta)

Esimerkki

Newtonin menetelmän analysointi.

Taylorin polynomit

Derivaatta $\leftrightarrow$ 1. asteen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h,$$

missä $c_1 = f'(x)$.

Korkeamman asteen approksimaatiot:

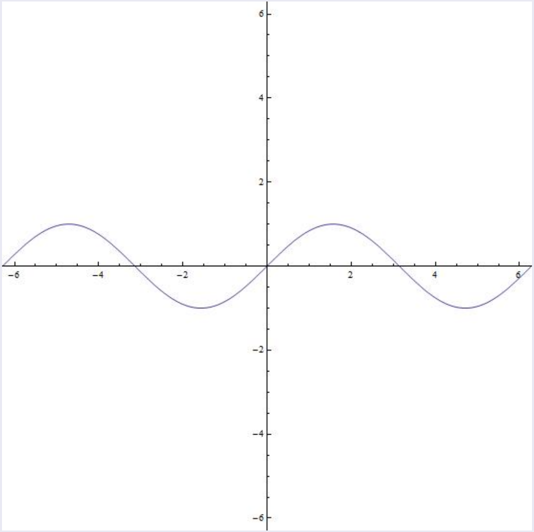
$$f(x+h) - f(x) \approx c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

Merkitään vielä $c_0 = f(x)$, jolloin

$$f(x+h) \approx c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots + c_n h^n$$

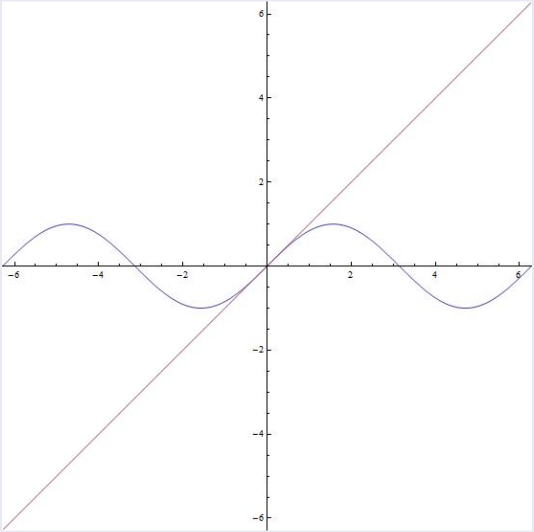
Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita



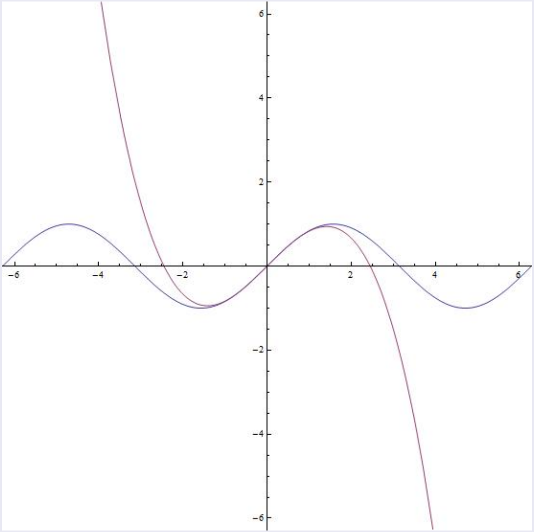
Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita



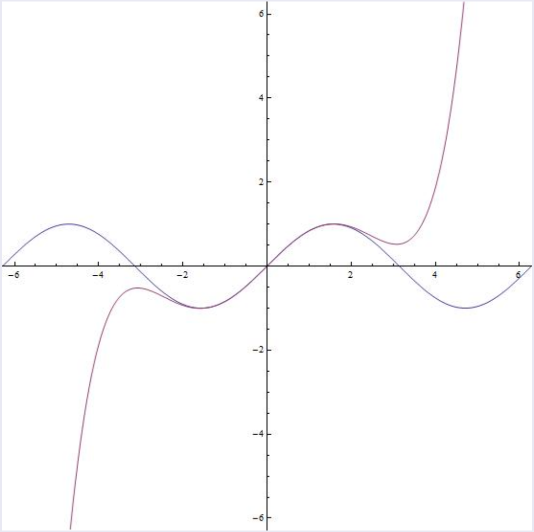
Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita



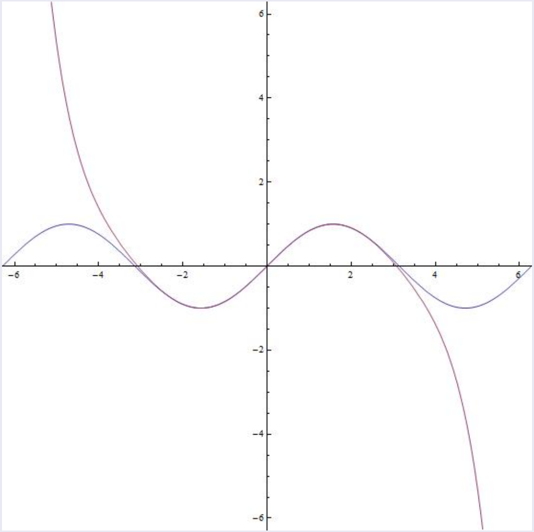
Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita



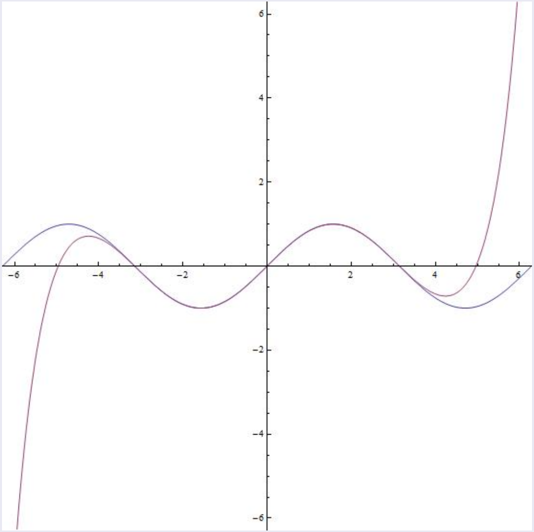
Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita

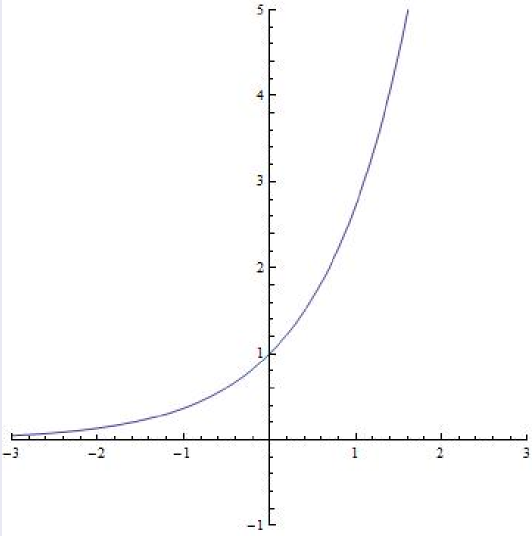


Taylorin polynomit

Sinifunktion approksimaatioita

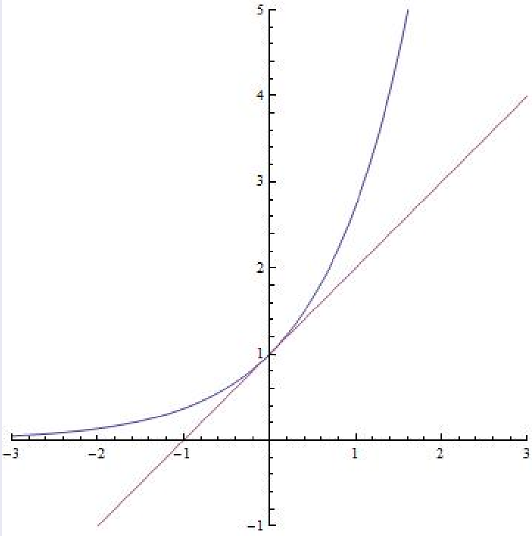


Eksponenttifunktion approksimaatioita



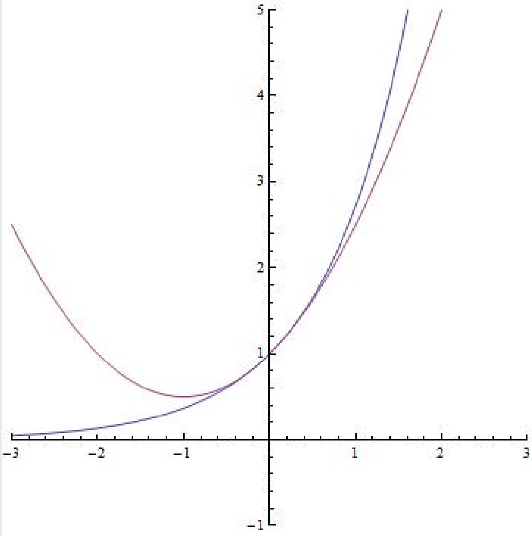
Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita

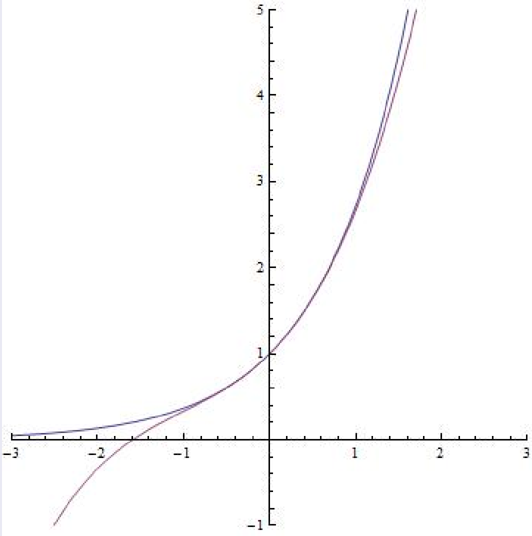


Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita

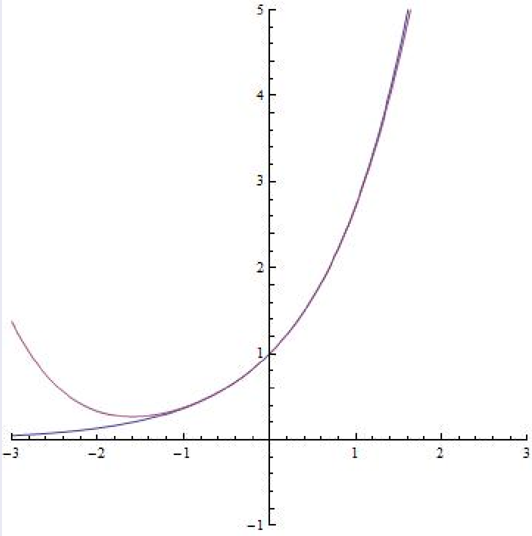


Eksponenttifunktion approksimaatioita

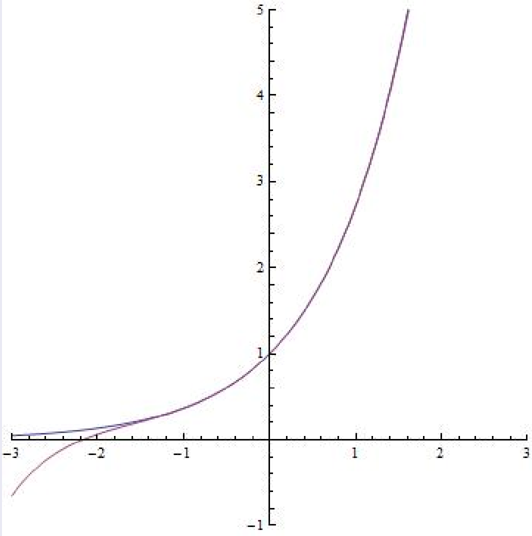


Taylorin polynomit

Eksponenttifunktion approksimaatioita



Eksponenttifunktion approksimaatioita



Korkeamman asteen approksimaatiot

Jos

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \ldots,$$

miten määritetään c_0, c_1, c_2, ... ? Tiedetään, että $c_0 = f(x)$ ja $c_1 = f'(x)$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ nähdään, että pitäisi olla

$$f'(x+h) = c_1 + 2c_2 h + 3c_3 h^2 + 4c_4 h^3 + 5c_5 h^4 + \ldots,$$

johon sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'(x) = c_1$. Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3 h + 12c_4 h^2 + 20c_5 h^3 + \ldots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$.

Korkeamman asteen approksimaatiot

Laskemalla $\frac{d}{dh}$ uudelleen nähdään, että pitäisi olla

$$f''(x+h) = 2c_2 + 6c_3h + 12c_4h^2 + 20c_5h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f''(x) = 2c_2$. Derivoimalla edelleen saadaan

$$f'''(x+h) = 6c_3 + 24c_4h + 60c_5h^2 + 120c_6h^3 + \dots$$

ja sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että $f'''(x) = 6c_3$.

Taylorin polynomit

Korkeamman asteen approksimaatiot

Yleisesti, etsittäessä kerrointa c_n esityksestä

$$f(x+h) = c_0 + c_1 h + \ldots + c_n h^n + \ldots$$

derivoidaan n kertaa h:n suhteen, jolloin saadaan

$$f^{(n)}(x+h) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}h + \ldots.$$

Sijoittamalla $h = 0$ nähdään, että

$$f^{(n)}(x) = n!c_n,$$

josta

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Taylorin polynomit

Määritelmä

Oletetaan, että funktiolla f on pisteessä x derivaatat n:nteen kertalukuun asti. Funktion f n:nen asteen Taylorin polynomi pisteessä x on

$$P_n(h) = \frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

Jos $x = 0$, polynomia $P_n(h)$ kutsutaan myös Maclaurinin polynomiksi.

Taylorin polynomit

Lause

Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva pisteessä x, on

$$f(x+h) = \underbrace{\frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{P_n(h)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

missä $\xi \in (x, x+h)$ (tai $\xi \in (x+h, x)$ jos $h < 0$). Termiä

$$E_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

sanotaan jäännöstermiksi tai virhetermiksi. Ylläolevaa esitystä sanotaan funktion f Taylorin kehitelmäksi pisteessä x. Jos $x = 0$, sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

Taylorin polynomit

Huomautus

Merkitsemällä x:n paikalle x_0 ja h:n paikalle $x - x_0$ saadaan Taylorin kehitelmä muotoon

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\
&+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},
\end{aligned}
$$

missä $\xi \in (x, x_0)$ tai $\xi \in (x_0, x)$.
Jos $x_0 = 0$, sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

Esimerkkejä

- Eksponenttifunktion Taylorin polynomit pisteessä $x = 0$
- Esimerkit: $\sin x$, $(1 + x)^\alpha$.