

# Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo  
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2021

## Lause

Jos funktio  $f$  on  $n + 1$  kertaa derivoituva pisteessä  $x$ , on

$$f(x + h) = \underbrace{\frac{f(x)}{0!} + \frac{f'(x)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n}_{P_n(h)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

missä  $\xi \in (x, x + h)$  (tai  $\xi \in (x + h, x)$  jos  $h < 0$ ). Termiä

$$E_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

sanotaan jäännöstermiksi tai virhetermiksi. Ylläolevaa esitystä sanotaan funktion  $f$  Taylorin kehitelmäksi pisteessä  $x$ . Jos  $x = 0$ , sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

## Huomautus

Merkitsemällä  $x$ :n paikalle  $x_0$  ja  $h$ :n paikalle  $x - x_0$  saadaan Taylorin kehitelmä muotoon

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

missä  $\xi \in (x, x_0)$  tai  $\xi \in (x_0, x)$ .

Jos  $x_0 = 0$ , sanotaan kehitelmää Maclaurinin kehitelmäksi.

## Esimerkkejä

- Eksponenttifunktion Taylorin polynomit pisteessä  $x = 0$
- Esimerkit:  $\sin x$ ,  $(1 + x)^\alpha$ .

## Huomautus

- Derivaattojen  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$ , ... määrittäminen yleensä työlästä, eikä selkeää systemaattista muotoa välttämättä löydy helposti.
- Poikkeuksia:  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\frac{1}{1-x}$ , ....
- Useimmiten kannattaa turvautua tunnettuihin Taylorin polynomeihin, niiden yhdistämisiin ja sijoituksiin.

## Määritelmä

Jos on olemassa vakio  $K > 0$  ja pisteen  $x_0$  avoin ympäristö, jossa

$$|f(x)| \leq K |g(x)|,$$

merkitään  $f(x) = O(g(x))$ , kun  $x \rightarrow x_0$  tai  $f(x) = O(g(x), x_0)$ .

Tapauksessa  $x_0 = \infty$  avoin ympäristö tarkoittaa väliä  $(M, \infty)$ .

Merkintä  $f(x) = g(x) + O(h(x))$  tarkoittaa

$$f(x) - g(x) = O(h(x)).$$

## Lause

Jos  $f^{(n+1)}(x)$  on jatkuva jossain pisteen  $x$  avoimessa ympäristössä ja  $P_n(h)$   $f$ :n Taylorin polynomi, niin

$$f(x+h) = P_n(h) + O(h^{n+1}), \quad \text{kun } h \rightarrow 0$$

## Huomautus

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$ , kun  $x \rightarrow 0$ ,
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$ , kun  $x \rightarrow 0$ ,
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$ , kun  $x \rightarrow 0$ .
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$ ,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$ ,
- $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$ , kun  $x \rightarrow 0$ .

## Ordo-merkintöjen laskusääntöjä

Olkoot  $m$  ja  $n$  ( $n \leq m$ ) positiivisia reaalilukuja. Tällöin

- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^n)$ , jos  $x \rightarrow 0$
- $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$ , jos  $x \rightarrow \infty$
- $cO(f(x)) = O(f(x))$ , kun  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- $x^n O(x^m) = O(x^{n+m})$ .
- $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$ .
- $x^{-m}O(x^{n+m}) = O(x^n)$ .
- $f(x) = O(x^{n+m}) \Rightarrow f(x) = O(x^n)$ , jos  $x \rightarrow 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} O((x - x_0)^n) = 0$ .



# Taylorin polynomit

## Lause

Jos on olemassa astetta  $n$  oleva polynomi  $Q(h)$  jolle  
 $f(x+h) = Q(h) + O(h^{n+1})$ , kun  $h \rightarrow 0$ , niin  $Q(h)$  on funktion  $f$   
Taylorin polynomi pisteessä  $x$ .

## Esimerkki

Koska

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5), \quad \text{kun } x \rightarrow 0,$$

on

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^4}{24} + O\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^5\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + O(x^{10}), \quad \text{kun } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

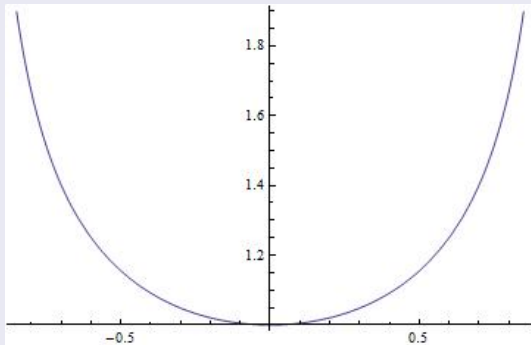
## Esimerkki

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \rightarrow 0,$$

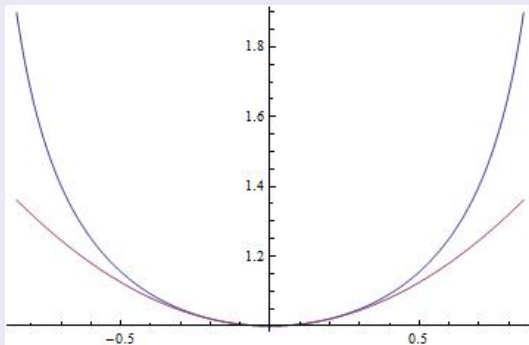
joten (sij.  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $x = -t^2$ )

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + O(t^6), \quad \text{kun } t \rightarrow 0.$$

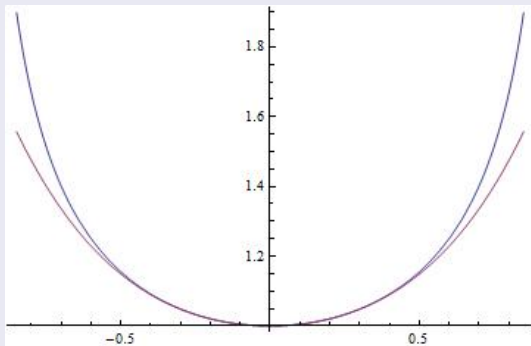
Funktion  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  approksimaatioita



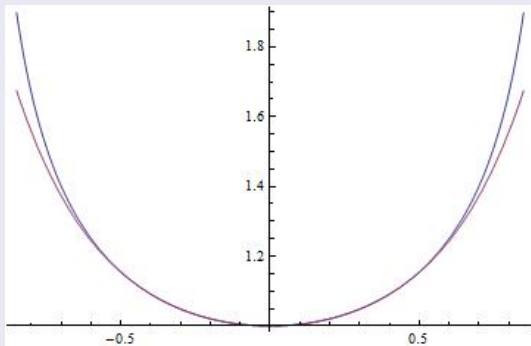
Funktion  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  approksimaatioita



Funktion  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  approksimaatioita



Funktion  $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  approksimaatioita



## Relativistinen kokonaisenergia

$$\begin{aligned}E_{\text{tot}} &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) \\&= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^2} + \dots \\&= E_{\text{mass}} + E_{\text{kin}},\end{aligned}$$

missä  $E_{\text{mass}} = m_0 c^2$  ja  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^2} + \dots$  (Einstein)

Newton:  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2$ .

## Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}?$$

$$\frac{\tan x - \sin x - \frac{x^3}{2}}{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}$$

$$= \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7) - (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7)) - \frac{x^3}{2}}{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7) - x + \frac{x^3}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}x^5 + O(x^7)}{\frac{1}{5}x^5 + O(x^7)}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} + O(x^2)}{\frac{1}{5} + O(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{8}.$$



## Varhaisvaiheet

- Eudoksos Knidoslainen (410 tai 408 eKr–355 tai 347 eKr)
- Arkhimedes Syrakusalainen (n.287 eKr–n.212 eKr)

## Uusi aika

- Isaac Newton (1642–1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

## Linkki differentiaalilaskentaan

Newtonin-Leibnizin kaava

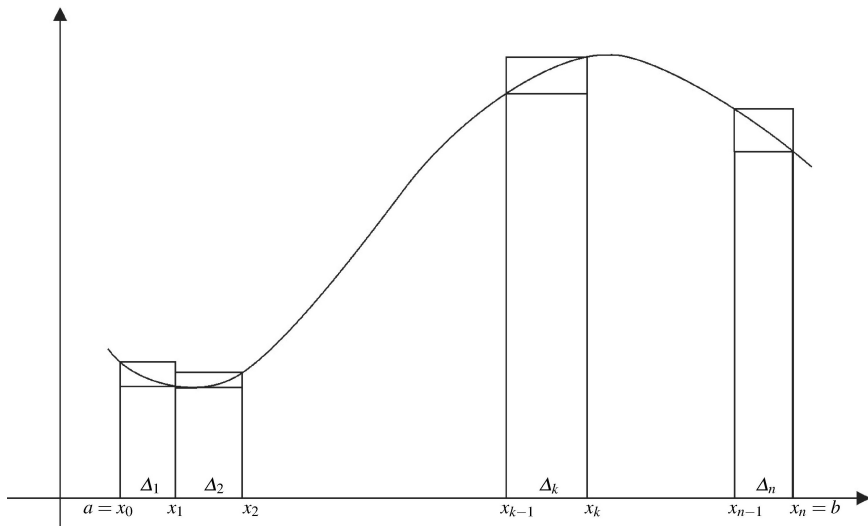
## Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Jean Gaston Darboux (1842–1917)
- Johtavat samaan integraalikäsitteeseen, Darboux'n esitys yksinkertaisempi

## Yleistyksiä (ei kuulu kurssiin)

- Stieltjesin integraali
- Lebesguen integraali
- Haarin integraali

# Darboux'n integraali



## Taustaoletus

Olkoon  $f$  välillä  $[a, b]$  määritelty rajoitettu funktio.

## Merkintöjä

- Välin  $[a, b]$  jako on äärellinen joukko  $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , missä  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  ja  $x_i < x_{i+1}$ .
- $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$  on jaon  $i$ :s väli
- $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$  on  $i$ :nnen välin pituus
- $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$
- $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta_i\}$

## Määritelmä

Välin  $[a, b]$  jakoon  $D$  liittyvä funktion  $f$  Darboux'n yläsumma on

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i x$$

ja alasumma

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i x$$

## Lause

Jokaiselle jaolle  $D$  pätee

$$\underline{S}_D \leq \overline{S}_D.$$

# Darboux'n integraali

## Määritelmä

Jos  $D_1$  ja  $D_2$  ovat molemmat välin  $[a, b]$  jakoja, sanotaan, että  $D_2$  on  $D_1$ :n tihennys, jos  $D_1 \subseteq D_2$ .

## Huomautus

Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, saadaan  $D_2$  joukosta  $D_1$  lisäämällä äärellinen määrä pisteitä.

## Lause

Jos  $D_2$  on jaon  $D_1$  tihennys, niin  $\overline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_1}$  ja  $\underline{S}_{D_2} \geq \underline{S}_{D_1}$ .

## Lause

Mikään alasumma ei voi ylittää mitään yläsummaa, siis  $\underline{S}_{D_1} \leq \overline{S}_{D_2}$  kaikille jaoille  $D_1$  ja  $D_2$ .

## Huomautus

Välin  $[a, b]$  jako  $D_0 = \{a, b\}$  tuottaa ylä- ja alasummat  $\overline{S}_{D_0} = M(b - a)$  ja  $\underline{S}_{D_0} = m(b - a)$ , missä  $M$  ja  $m$  ovat funktion  $f$  supremum- ja infimum koko välillä  $[a, b]$ .

## Lause

Alasummien joukko on on ylhäältä rajoitettu ja yläsummien alhaalta rajoitettu.

## Määritelmä

Funktion  $f$  yläintegraali välillä  $[a, b]$  on

$$\int_a^b f = \inf \{ \bar{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako} \}$$

ja alaintegraali

$$\int_a^b f = \sup \{ \underline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako} \}$$



## Määritelmä

Välillä  $[a, b]$  rajoitettu funktio on Darboux-integroituva (ja samalla Riemann-integroituva), mikäli

$$\int_a^b f = \int_{\frac{b}{a}}^b f.$$

Tällöin ylä- ja alaintegraalin yhteistä arvoa kutsutaan funktion  $f$  (Darboux- tai Riemann-) integraaliksi välillä  $[a, b]$  ja siitä käytetään merkintöjä

$$\int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Lukuja  $a$  ja  $b$  kutsutaan integrointivälin tai integraalin ala- ja ylärajoiksi ja funktiota  $f$  integrandiksi.

## Esimerkki

- Esimerkki: Vakiofunktio
- Esimerkki: Joukon  $\mathbb{Q}$  karakteristinen funktio.