

Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2021

Määritelmä

Välin $[a, b]$ jakoon D liittyvä funktion f Darboux'n yläsumma on

$$\overline{S}_D = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i x$$

ja alasumma

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i x$$

Lause

Jokaiselle jaolle D pätee

$$\underline{S}_D \leq \overline{S}_D.$$

Darboux'n integraali

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Huomautus

Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, saadaan D_2 joukosta D_1 lisäämällä äärellinen määrä pisteitä.

Lause

Jos D_2 on jaon D_1 tihennys, niin $\overline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_1}$ ja $\underline{S}_{D_2} \geq \underline{S}_{D_1}$.

Lause

Mikään alasumma ei voi ylittää mitään yläsummaa, siis $\underline{S}_{D_1} \leq \overline{S}_{D_2}$ kaikille jaoille D_1 ja D_2 .

Huomautus

Välin $[a, b]$ jako $D_0 = \{a, b\}$ tuottaa ylä- ja alasummat $\overline{S}_{D_0} = M(b - a)$ ja $\underline{S}_{D_0} = m(b - a)$, missä M ja m ovat funktion f supremum- ja infimum koko välillä $[a, b]$.

Lause

Alasummien joukko on on ylhäältä rajoitettu ja yläsummien alhaalta rajoitettu.

Määritelmä

Funktion f yläintegraali välillä $[a, b]$ on

$$\int_a^b f = \inf \{ \bar{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako} \}$$

ja alaintegraali

$$\int_a^b f = \sup \{ \underline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako} \}$$

Määritelmä

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio on Darboux-integroituva (ja samalla Riemann-integroituva), mikäli

$$\int_a^{\frac{b}{a}} f = \int_{\frac{1}{a}}^b f.$$

Tällöin ylä- ja alaintegraalin yhteistä arvoa kutsutaan funktion f (Darboux- tai Riemann-) integraaliksi välillä $[a, b]$ ja siitä käytetään merkintöjä

$$\int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Lukuja a ja b kutsutaan integrointivälin tai integraalin ala- ja ylärajoiksi ja funktiota f integrandiksi.

Esimerkki

- Esimerkki: Vakiofunktio
- Esimerkki: Joukon $\mathbb{Q}$ karakteristinen funktio.

Lause

Jos $\mathcal{D}'$ on jokin kokoelma välin $[a, b]$ jakoja ja

$$I = \sup\{\underline{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\} = \inf\{\overline{S}_{D'} \mid D' \in \mathcal{D}'\},$$

niin tällöin f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b f = I.$$

Esimerkki

Esimerkki $f(x) = x^2$, tasavälinen jako välillä $[0, 1]$. Olkoon

$$D_n = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} \right\}.$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_{D_n} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\underline{S}_{D_n} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3n-1}{2n^2} \right)\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad \int_{\frac{0}{0}}^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

joten

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Riemannin integroituvuusehto

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on integroituva tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen jako D , että

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D = d(\overline{S}_D, \underline{S}_D) \leq \epsilon.$$

Lause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, on se myös integroituva välillä $[a, b]$.

Lause

Jos integroituvan funktion arvoa muutetaan yhdessä pisteessä, säilyy sekä integroituvuus että integraalin arvo.

Lause

Oletetaan, että f ja g integroituvia välillä $[a, b]$. Tällöin myös funktiot cf ($c \in \mathbb{R}$) ja $f + g$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f,$$
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Vertaa:

$$\sum_{i=1}^n cf_i = c \sum_{i=1}^n f_i$$
$$\sum_{i=1}^n (f_i + g_i) = \sum_{i=1}^n f_i + \sum_{i=1}^n g_i.$$

Lause

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $c \in (a, b)$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Vertaa:

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^m f_i + \sum_{i=m+1}^n f_i.$$

Lause

Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$, niin samoin on $f \pm g$ ja fg . Jos lisäksi $\frac{1}{g}$ on rajoitettu välillä $[a, b]$, niin myös $\frac{f}{g}$ on integroituva.

Määritelmä

Jos $a < b$ ja f on integroituva välillä $[a, b]$, määritellään

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

ja

$$\int_a^a f = 0.$$

Seuraus

Jos f on integroituva välillä I , on

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

kaikille välin I luvuille a , b ja c .

Lause

Jos f ja g ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja $f \leq g$, on

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Vertaa: Jos $f_i \leq g_i$, on

$$\sum_{i=1}^n f_i \leq \sum_{i=1}^n g_i$$

Lause

Jos $f \geq 0$ on jatkuva välillä $[a, b]$ niin $\int_a^b f \geq 0$ ja $= 0$ tarkalleen silloin kun $f = 0$ välillä $[a, b]$.

Kolmioepähtälo

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$, niin myös $|f|$ on integroituva ja tällöin

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Vertaa:

$$\left| \sum_{i=1}^n f_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f_i|.$$

Huomautus

Jos $a > b$, on

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|.$$

Määritelmä

Oletetaan, että f on integroituva välillä I ja että $c \in I$. Tällöin jokaista $x \in I$ kohti voidaan määritellä

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt.$$

Funktiota $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan f :n integraalifunktioksi.

Lause

Välillä I rajoitetun ja integroituvan funktion f integraalifunktio on jatkuva välillä I .

Esimerkki

$f(x) = 0$, kun $x < 0$ ja $f(x) = 1$, kun $x \geq 0$.

Analyysin peruslause

Funktion f integraalifunktio F on derivoituva niissä pisteissä, missä f on jatkuva. Näissä pisteissä pätee lisäksi

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f = f(x).$$

Seuraus

Välillä I jatkuvalla funktiolla on olemassa antiderivaatta.

Todistus

$$\begin{aligned} & F(x+h) - F(x) \\ &= \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt = \int_x^{x+h} (f(x) + f(t) - f(x)) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(x) dt + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \\ &= f(x) \cdot h + h \cdot \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt}_{\epsilon(h)} \end{aligned}$$

Todistus (jatkoa)

Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun $|h|$ on riittävän pieni, on $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ ja

$$\begin{aligned} |\epsilon(h)| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} \varepsilon dx \right| \\ &= \frac{1}{h} \cdot h\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Newtonin–Leibnizin kaava

Välillä $[a, b]$ jatkuvalle funktiolle f pätee

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

missä F on jokin funktion f antiderivaatta.

Määritelmä

Merkintä "sijoitus a :sta b :hen" määritellään

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Todistus

Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt$$

on funktion $f(x)$ antiderivaatta. Jos $F(x)$ on jokin toinen antiderivaatta, on integraalilaskennan peruslauseen mukaan

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Sijoittamalla $x = a$ nähdään, että $0 = F(a) + C$, mistä $C = -F(a)$. Sijoittamalla $x = b$ saadaan

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Analogia

Määritellään differenssi Δf seuraavasti: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.
Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \Delta f(k) &= \Delta f(1) + \Delta f(2) + \dots + \Delta f(n) \\ &= (f(n+1) - f(n)) + (f(n) - f(n-1)) \\ &\quad + \dots + (f(3) - f(2)) + (f(2) - f(1)) \\ &= f(n+1) - f(1)\end{aligned}$$

Esimerkki

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

Esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x < 0 \\ x + 1, & \text{kun } x \in [0, 1] \\ x^2 + 1, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^2 f(x) \, dx?$$

Esimerkki

$$h(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} \, dt, \quad h'(x)?$$

Osittaisintegrointi

$$\int_a^b fg' = \left[fg \right]_a^b - \int_a^b f'g$$

Esimerkki

$$\int_0^2 xe^x dx$$

Sijoitus integraaliin

Jos g' on jatkuva välillä $[\alpha, \beta]$, $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$, ja $g(\alpha) = a$ sekä $g(\beta) = b$, niin

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt.$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

$$x = \sin t.$$

Määritelmä

Funktio f on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$ ja pariton, jos $f(-x) = -f(x)$.

Esimerkki

$f(x) = x^2$ on parillinen ja $f(x) = x^3$ pariton.

Esimerkki

$\sin x$ on pariton ja $\cos x$ parillinen. Huomaa että

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9)$$

ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(x^8).$$

Lause

Olkoon f jatkuva välillä $[-a, a]$. Jos f on parillinen, on

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$$

ja jos f on pariton, on

$$\int_{-a}^a f = 0$$

xy-muoto

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x) dx$$

Intuitio:

Integraali vastaa äärettömän monen "äärettömän kapean" (infinitesimaalisen) pinta-ala -alkion $dA = f(x) dx$ summaamista

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

(Parametrimuoto)