

Insinöörimatematiikka 1

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2021

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds$$

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat jatkuvia, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat jatkuvia, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

(Parametrimuoto)

xy-muoto $y = f(x)$

Merkitään $x = t$, $y = f(t)$, jolloin kaarenpituudeksi saadaan

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Intuitio:

Tilavuus saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista tilavuusalkiota:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$$

Intuitio:

Tilavuus saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista tilavuusalkiota:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$$

Pyörähdyskappale

- Tilavuus
- Vaipan pinta-ala

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi
- Yleistystä funktioille, jotka eivät ole rajoitettuja kutsutaan II lajin epäoleelliseksi integraaliksi.

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^{\infty} f =$$

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa.

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ *suppenee* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan että integraali *hajaantuu* ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow$$

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

I lajin epäoleellinen integraali

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

Esimerkki ($a > 0$)

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^s} \, dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c, d] \subseteq [a, \infty)$,
Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$
suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien $[c, d] \subseteq [a, \infty)$.
Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin kun $\int_b^\infty f$
suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

Lause

$$\int_a^\infty (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g,$$

mikäli oikean puolen integraalit suppenevat (On mahdollista, että vasemman puolen integraali suppenee, vaikka oikean puolen eivät).

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g :n minorantti ja että g on f :n majorantti.

I lajin epäoleellinen integraali

Vertailutarkastin

Olkoon $0 \leq f \leq g$ kun $x \geq M$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, b]$. Tällöin

- $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- $\int_a^\infty f \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty g \uparrow$

Lisäksi sanotaan että f on g :n minorantti ja että g on f :n majorantti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} dx \quad \text{ja} \quad \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} dx$$

Lause

Olkoot $f(x), g(x) > 0$ kun $x \geq M$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Olkoot $f(x), g(x) > 0$ kun $x \geq M$ ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Tällöin

- Jos $L = 0$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\int_a^\infty g \downarrow \Leftrightarrow \int_a^\infty f \downarrow$
- Jos $L = \infty$, niin $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2} dx$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

$$\int_a^\infty |f| \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty f \downarrow$$

Määritelmä

Jos $\int_a^\infty f$ suppenee mutta $\int_a^\infty |f|$ hajaantuu, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee ehdollisesti. Jos $\int_a^\infty |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee itseisesti.

Esimerkki

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Esimerkki

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \qquad \int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a, b - \epsilon]$, mutta ei rajoitettu väleillä $[b - \epsilon, b]$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Integraali, jossa f ei ole rajoitettu alarajan a ympäristössä, määritellään analogisesti:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\epsilon}^b f.$$

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)} dx$$

II lajin epäoleellinen integraali

Esimerkki

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^s(x^2+1)} dx$$

Esimerkki

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Esimerkki

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu kaikkialla muualla paitsi pisteen $c \in (a, \infty)$ ympäristössä. Valitaan $d > c$ ja tällöin

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^\infty f.$$

Kaksi ensimmäistä integraalia ovat II lajin epäoleellisia, viimeisin I lajin.

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Määritelmä

Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ Cauchyn pääarvo määritellään

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f$$

ja tästä käytetään myös yleensä merkintää $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Huomautus

Fourier-analyysissa $\int_{-\infty}^{\infty} f$ tarkoittaa yleensä Cauchyn pääarvoa.

Esimerkki

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots a_Nx^N \\ &= g(0, x) + g(1, x) + g(2, x) + \dots + g(N, x), \end{aligned}$$

missä $g(i, x) = a_i x^i$, mutta yleisempikin muoto lausekeelle $g(i, x)$ on mahdollinen.

Vielä yleisempi:

$$f(x) = \int_0^N g(t, x) dt$$

Esimerkki

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots a_Nx^N \\ &= g(0, x) + g(1, x) + g(2, x) + \dots + g(N, x), \end{aligned}$$

missä $g(i, x) = a_i x^i$, mutta yleisempikin muoto lausekeelle $g(i, x)$ on mahdollinen.

Vielä yleisempi:

$$f(x) = \int_0^N g(t, x) dt$$

Vieläkin yleisempi:

$$f(x) = \int_0^\infty g(t, x) dt$$

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Γ -funktion ominaisuuksia

- Integraalin suppeneminen ($x > 0$)

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Γ -funktion ominaisuuksia

- Integraalin suppeneminen ($x > 0$)
- Rekursio $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Γ -funktion ominaisuuksia

- Integraalin suppeneminen ($x > 0$)
- Rekursio $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(1) = 1$

Määritelmä

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Γ -funktion ominaisuuksia

- Integraalin suppeneminen ($x > 0$)
- Rekursio $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(n + 1) = n!$, kun $n \in \mathbb{N}$.