

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 1, 18.1.2022

1. Olkoot $\mathbf{b}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\mathbf{b}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Oletetaan tunnetuksi, että $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Määritellään lineaarikuvaus f ehdoilla $f(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_1$ ja $f(\mathbf{b}_2) = -3\mathbf{b}_2$. Mikä on kuvauksen f matriisi kannan B suhteen?
2. Määritä edellisen tehtävän kuvaukselle f matriisi luonnollisten kantojen suhteen.
3. Merkintä C^∞ tarkoittaa koko reaaliakselilla määriteltyjen funktioiden joukkoa, joilla on kaikkien kertalukujen derivaatat olemassa. Määrittelemällä funktioiden yhteen- ja skalaarikertolasku tavalliseen tapaan joukosta C^∞ muodostuu vektoriarvaruus. Oletetaan tunnetuksi, että funktiojoukko $B = \{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ on avaruudessa C^∞ lineaarisesti riippumaton.
 - a) Kuinka moniulotteinen on avaruuden C^∞ aliavaruus $V = \langle B \rangle$?
 - b) Osoita, että $D : V \rightarrow V$, missä $Df(x) = f'(x)$ (derivointi) on lineaarikuvaus ja etsi D :n matriisi kannan B suhteen.
4. Määritä matriisin $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi.
5. Perustele mahdollisimman yksinkertaisesti, että matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 11 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

on singulaarinen.

6. Olkoon $ad - bc = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Laske tulomatriisi AX ja osoita sen perusteella, että yhtälö $AX = I$ ei voi toteutua millekään matriisille X .

7. Etsi vektorille $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esitys kannan $C = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\}$ avulla. Mikä on kannanvaihdon matriisi $B \rightarrow C$ matriisi M , kun B tarkoittaa luonnollista kantaa? Entä mikä on M^{-1} ?
8. Mitä ovat determinanttien

$$\begin{vmatrix} c & * \\ 0 & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b & * & * \\ 0 & c & * \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

arvot, kun asteriskit (*) esittävät mitä hyvänsä lukuja? Ohje: Kehitä 3- ja 4-riviset determinantit ensimmäisen sarakkeen suhteen.

9. Laske seuraavat determinantit käsin:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

10. Laske seuraavat determinantit käsin:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}.$$