

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 1, 18.1.2022

1. Olkoot $\mathbf{b}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ja $\mathbf{b}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Oletetaan tunnetuksi, että $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta. Määritellään lineaarikuvaus f ehdoilla $f(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_1$ ja $f(\mathbf{b}_2) = -3\mathbf{b}_2$. Mikä on kuvauksen f matriisi kannan B suhteen?

Vastaus: Matriisin sarakkeet voidaan määrittää kantavektorien kuvista. $f(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2$ ja $f(\mathbf{b}_2) = 0 \cdot \mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2$, joten kysytty matriisi on

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Määritä edellisen tehtävän kuvaukselle f matriisi luonnollisten kantojen suhteen.

Vastaus: Koska $\mathbf{i} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$ ja $\mathbf{j} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)$, saadaan kuviksi $f(\mathbf{i}) = \frac{1}{2}f(\mathbf{b}_1) + \frac{1}{2}f(\mathbf{b}_2) = \frac{1}{2} \cdot 2\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2} \cdot (-3)\mathbf{b}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j}$ sekä $f(\mathbf{j}) = \frac{1}{2} \cdot 2\mathbf{b}_1 - \frac{1}{2} \cdot (-3)\mathbf{b}_2 = \frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$. Näistä saadaan matriisi

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Merkintä C^∞ tarkoittaa koko reaaliakselilla määriteltyjen funktioiden joukkoa, joilla on kaikkien kertalukujen derivaatat olemassa. Määrittelemällä funktioiden yhteen- ja skalaarikertolasku tavalliseen tapaan joukosta C^∞ muodostuu vektoriavaruus. Oletetaan tunnetuksi, että funktiojoukko $B = \{1, e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ on avaruudessa C^∞ lineaarisesti riippumaton.

a) Kuinka moniulotteinen on avaruuden C^∞ aliavaruus $V = \langle B \rangle$?

Vastaus: Koska joukon B alkioita on 4 ja ne ovat lineaarisesti riippumattomat, on aliavaruuden V dimensio 4.

b) Osoita, että $D : V \rightarrow V$, missä $Df(x) = f'(x)$ (derivointi) on lineaarikuvaus ja etsi D :n matriisi kannan B suhteen.

Vastaus: Derivoinnin ominaisuuksien perusteella $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$, joten D on lineaarinen. Matriisi saadaan selvittämällä kanta-alkioiden kuvat: $D1 = 0$, $De^x = e^x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot e^x + 0 \cdot e^{2x} + 0 \cdot e^{3x}$, $De^{2x} = 2e^{2x} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^x + 2e^{2x} + 0 \cdot e^{3x}$, ja $De^{3x} = 3e^{3x} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^x + 0 \cdot e^{2x} + 3 \cdot e^{3x}$. Näistä saadaan kysytty matriisi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Määritä matriisin $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi.

Vastaus: Gaussin-Jordanin menetelmällä saadaan

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

joten kysytty käänteismatriisi on

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Perustele mahdollisimman yksinkertaisesti, että matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 11 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

on singulaarinen.

Vastaus: Matriisin 3. rivi saadaan 1. rivistä luvulla 2 kertomalla. Täten rivit ovat lineaarisesti riippuvat ja matriisi on singulaarinen.

6. Olkoon $ad - bc = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}.$$

Laske tulomatriisi AX ja osoita sen perusteella, että yhtälö $AX = I$ ei voi toteutua millekään matriisille X .

Vastaus: Tulomatriisi on

$$\begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}.$$

Mikäli tämä on identiteettimatriisi, on

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bw = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

Kertomalla 1. yhtälö luvulla d ja 3. yhtälö luvulla $-b$ ja laskemalla nämä yhteen saadaan $(ad - bc)x = d$, mistä seuraa $d = 0$.

Kertomalla 2. yhtälö luvulla d ja 4. yhtälö luvulla $-b$ ja laskemalla nämä yhteen saadaan $(ad - bc)y = -b$, mistä seuraa $b = 0$. Täten yhtälöryhmä kutistuu muotoon

$$\begin{cases} ax = 1 \\ ay = 0 \\ cx = 0 \\ cy = 1 \end{cases}$$

1. yhtälön mukaan $a \neq 0$, joten 2. yhtälön mukaan $y = 0$. Tällöin 4. yhtälö on mahdoton.

7. Etsi vektorille $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esitys kannan $C = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\}$ avulla. Mikä on kannanvaihdon matriisi $B \rightarrow C$ matriisi M , kun B tarkoittaa luonnollista kantaa? Entä mikä on M^{-1} ?

Vastaus: Esityksen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kertoimet a ja b saadaan siis ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} a + b &= \sqrt{2}x \\ a - b &= \sqrt{2}y \end{cases}$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ja kysytty kannanvaihdon matriisi on

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matriisin M käänteismatriisi M^{-1} voidaan löytää Gaussin-Jordanin menetelmää käyttämällä, mutta ainakin käsin laskemalla lienee helpompaa unohtaa kerroin $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja etsiä ensin matriisin $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi, joka on $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Tästä seuraa (miksi?), että matriisin $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ käänteismatriisi on $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, siis matriisi M itse.

8. Mitä ovat determinanttien

$$\begin{vmatrix} c & * \\ 0 & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b & * & * \\ 0 & c & * \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

arvot, kun asteriskit (*) esittävät mitä hyvänsä lukuja? Ohje: Kehitä 3- ja 4-riviset determinantit ensimmäisen sarakkeen suhteen.

Vastaus: 2×2 -determinantin arvo on

$$\begin{vmatrix} c & * \\ 0 & d \end{vmatrix} = cd - 0 \cdot * = cd.$$

3×3 -determinantin arvo saadaan kehittämällä 1. sarakkeen suhteen:

$$\begin{vmatrix} b & * & * \\ 0 & c & * \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} c & * \\ 0 & d \end{vmatrix} = bcd.$$

4×4 -determinantin arvo saadaan niinikään kehittämällä 1. sarakkeen suhteen:

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & * & * \\ 0 & c & * \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

9. Laske seuraavat determinantit käsin:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Vastaus:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1 \quad \text{ja}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

10. Laske seuraavat determinantit käsin:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Vastaus:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) - 2(-4) = \lambda^2 - 1$$

ja

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)((2-\lambda)(-\lambda) + 3) + 2(\lambda - 2) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$