

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 2, 25.1.2022

1. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit.

Vastaus: Demotehtävän 18.1./10 perusteella matriisin ominaisarvoyhtälö on $\lambda^2 - 1 = 0$, jonka ratkaisut ovat $\lambda = \pm 1$.

Ominaisvektorit saadaan Gaussin-Jordanin menetelmällä. Ominaisarvoon 1 liittyvät ominaisvektorit ovat yhtälön

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -4 \\ 2 & -3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ratkaisut. Kerroinmatriisin redusoitu porrasmuoto on $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, josta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Samoin ominaisarvoon -1 liittyvät ominaisvektorit ovat yhtälön

$$\begin{pmatrix} 3+1 & -4 \\ 2 & -3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ratkaisut, ja tämän kerroinmatriisin redusoitu porrasmuoto on $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, josta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Olkoon A kuten edellisessä tehtävässä. Etsi sellainen matriisi P (jos olemassa), että $P^{-1}AP$ on diagonaalinen.

Vastaus: Matriisi P voidaan muodostaa valitsemalla sen sarakkeiksi matriisin A ominaisvektorit, esim.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koska tämän sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat (miksi?), P^{-1} on olemassa ja

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit

Vastaus: Demotehtävän 18.1./10 perusteella matriisin A ominaisarvoyhtälö on $(2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0$, jonka ratkaisut ovat $\lambda = 2$ (yksinkertainen juuri) ja $\lambda = 1$ (kaksinkertainen juuri).

Ominaisarvoon $\lambda = 2$ liittyvät ominaisvektorit saadaan yhtälön

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ratkaisuina, ja nämä ovat

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti ominaisarvoon $\lambda = 1$ liittyvät ominaisvektorit saadaan yhtälön

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{G-J}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ratkaisuina, ja nämä ovat

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Olkoon A kuten edellisessä tehtävässä. Etsi sellainen matriisi P (jos olemassa), että $P^{-1}AP$ on diagonaalinen.

Vastaus: Edellisen tehtävän perusteella matriisin A ominaisvektorit generoivat vain kaksiulotteisin avaruuden, joten kysyttyä matriisiä P ei voi olla olemassa.

5. Olkoot A ja B säännöllisiä $n \times n$ -matriiseja. Osoita, että $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Ohje: Mieti millä matriisilla AB pitäisi kertoa, jotta saataisiin identiteettimatriisi.

Vastaus: $B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$, joten $B^{-1}A^{-1}$ on matriisin AB käänteismatriisi, siis $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6. Selvitä matriisin $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit.

Vastaus: Ominaisarvoyhtälö on

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Tämän yhtälön ratkaisut ovat $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ominaisarvoon $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kuuluvat ominaisvektorit saadaan yhtälön

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{G-J}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tästä voidaan suoraan määrittää ominaisvektorit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2}y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ominaisarvoon $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kuuluvat ominaisvektorit

$$y \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

voidaan selvittää analogisella tavalla.

7. Etsi tehtävän 3 matriisille similaarinen matriisi, joka koostuu Jordan-lohkoista.

Vastaus: Ominaisarvon $\lambda = 2$ algebrallinen kertaluku on 1 ja siihen liittyvä ominaisvektorien avaruus on yksiulotteinen. Tähän ei siis tarvita täydennystä yleistettyjen ominaisvektoreiden avulla. Sen sijaan ominaisarvon $\lambda = 1$ algebrallinen kertaluku on kaksi, mutta siihen liittyvä ominaisvektoreiden muodostama avaruus on vain yksiulotteinen, joten tähän tarvitaan täydennykseksi 2. kertaluvun ominaisvektori.

Matriisin A ominaisarvoon $\lambda = 1$ liittyvät toisen kertaluvun ominaisvektorit saadaan yhtälöstä

$$(A - 1 \cdot I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{G-J} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mistä

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{y}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tehtävän 3 perusteella tiedetään, että 1. kertaluvun ominaisvektoreiden avaruuden E^1 generoi ainoastaan vektori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja jos valitaan 2. kertaluvun

ominaisvektoriksi $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, on selvää (miksi?) että tämä ei kuulu 1. kertaluvun

ominaisvektorin määrittämään avaruuteen E^1 .

Similaarisuuden välittävää matriisia varten on kuitenkin muodostettava Jordanin ketju, ja sitä varten valittava vektori

$$(A - 1 \cdot I) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E^1$$

similaarisuuden välittävän matriisin sarakkeeksi. Jordanin ketjuun kuuluvat vektorit on valittava oikealta vasemmalle kertaluvun kasvaessa. Näin ollen esim. matriisi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

välittää similaarisuuden:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tässä matriisissa vasen yläkulma 2 muodostaa 1×1 -suuruisen Jordan-lohkon ja oikea alakulma 2×2 -suuruisen Jordan-lohkon.

8. Laske e^{tA} , missä A on tehtävän 1 matriisi. Laske lisäksi $\frac{d}{dt}e^{tA}$.

Vastaus: Tehtävien 1 ja 2 perusteella on

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

joten

$$tA = P \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} P^{-1}$$

ja

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & 2e^{-t} - 2e^t \\ e^t - e^{-t} & 2e^{-t} - e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tämän derivaatta t :n suhteen on

$$\begin{pmatrix} 2e^t + e^{-t} & -2e^{-t} - 2e^t \\ e^t + e^{-t} & -2e^{-t} - e^t \end{pmatrix}.$$

Suoralla laskulla voidaan todeta että tämä on sama kuin Ae^{tA} .

9. Laske $\sin A$, missä A on tehtävän 1 matriisi. Ohje: Eulerin kaavan perusteella sinifunktio on mahdollista esittää kompleksisen eksponenttifunktion avulla. Toinen tapa on soveltaa luennolla esitettyä tapaa suoraan sinifunktiolle.

Vastaus: Diagonaaliesityksen

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \sin A &= P \begin{pmatrix} \sin(-1) & 0 \\ 0 & \sin 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \sin 1 \cdot P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \sin 1 \cdot A = \sin 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$