

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 3, 1.2.2022

1. Totea että avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijoukko $B = \{(1, 2, 1), (2, -1, 0), (1, 2, -5)\}$ on ortogonaali tavallisen pistetulon suhteen. Esitä vektori $(3, 2, 1)$ joukon B lineaarikombinaationa.
2. Olkoon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ reaalisen avaruuden sisätulo ja $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ jokin lineaarisesti riippumaton vektorijoukko. Määritellään $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \alpha \mathbf{y}_1$ miten α pitäisi valita, että joukko $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ on ortogonaali?
3. Olkoot merkinnät kuten edellisessä tehtävässä ja $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \beta \mathbf{y}_1 - \gamma \mathbf{y}_2$. Miten kertoimet β ja γ pitää valita jotta joukko $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ olisi ortogonaali? Huomaa, että edellisen tehtävässä määrätyn vakion α perusteella $\mathbf{y}_1$ ja $\mathbf{y}_2$ ovat jo kohtisuorassa.
4. Selvitä määrittelee $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|$ normin luennolla esitetyn mukaisesti, kun $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
5. Olkoon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jokin sisätulo ja $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Osoita suoraan laskemalla, että

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Selitä miksi tätä yhtälöä kutsutaan suunnikassäännöksi.

6. Olkoon $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|$. Etsi tapauksessa $n = 2$ jokin esimerkki, jossa edellisessä tehtävässä mainittu suunnikassääntö *ei päde*.
7. Polynomit $\{1, x, x^2\}$ generoivat kolmiulotteisen vektoriavaruuden. Määritellään tässä avaruudessa sisätulo seuraavasti:

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

Laske $(1, x)$, $(1, x^2)$ ja (x, x^2) .

8. Olkoon sisätulo sama kuin edellisessä tehtävässä. Etsi jokin 1. asteen polynomi, joka on kohtisuorassa vakiopolynomia 1 vastaan.
9. Määritellään jatkuville reaalfunktioille sisätulo ehdolla

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} fg.$$

Selvitä ovatko funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ortogonaalit tämän sisätulon suhteen. Entä ovatko funktiot $\sin x$ ja $\sin 2x$ ortogonaalit saman sisätulon suhteen?