

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 3, 1.2.2022

1. Totea että avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorijoukko $B = \{(1, 2, 1), (2, -1, 0), (1, 2, -5)\}$ on ortogonaali tavallisen pistetulon suhteen. Esitä vektori $(3, 2, 1)$ joukon B lineaarikombinaationa.

Vastaus: Suoraan laskemalla voidaan todeta, että $(1, 2, 1) \cdot (2, -1, 0) = 0$, $(1, 2, 1) \cdot (1, 2, -5) = 0$ ja $(2, -1, 0) \cdot (1, 2, -5) = 0$.

Haluttaessa esittää $(3, 2, 1)$ joukon B lineaarikombinaationa

$$(3, 2, 1) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, -1, 0) + c_3(1, 2, -5)$$

voidaan kertoimet c_1 , c_2 ja c_3 määrittää laskemalla pistetulot ortogonaalisuuden perusteella:

$$(3, 2, 1) \cdot (1, 2, 1) = c_1(1, 2, 1) \cdot (1, 2, 1),$$

josta $c_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Samoin

$$(3, 2, 1) \cdot (2, -1, 0) = c_2(2, -1, 0) \cdot (2, -1, 0),$$

josta $c_2 = \frac{4}{5}$. Edelleen samoin

$$(3, 2, 1) \cdot (1, 2, -5) = c_3(1, 2, -5) \cdot (1, 2, -5),$$

josta $c_3 = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$. Näistä saadaan esitys

$$(3, 2, 1) = \frac{4}{3}(1, 2, 1) + \frac{4}{5}(2, -1, 0) + \frac{1}{15}(1, 2, -5)$$

2. Olkoon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ reaalisen avaruuden sisätulo ja $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ jokin lineaarisesti riippumaton vektorijoukko. Määritellään $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \alpha\mathbf{y}_1$ miten α pitäisi valita, että joukko $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ on ortogonaali?

Vastaus: Yhtälöstä

$$0 = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 - \alpha\mathbf{y}_1) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2) - \alpha(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1)$$

$$\text{seuraa } \alpha = \frac{(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2)}{(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1)} = \frac{(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{y}_1\|^2}$$

3. Olkoot merkinnät kuten edellisessä tehtävässä ja $\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \beta\mathbf{y}_1 - \gamma\mathbf{y}_2$. Miten kertoimet β ja γ pitää valita jotta joukko $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ olisi ortogonaali? Huomaa, että edellisen tehtävässä määrätyn vakion α perusteella $\mathbf{y}_1$ ja $\mathbf{y}_2$ ovat jo kohtisuorassa.

Vastaus: Yhtälöstä

$$0 = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_3) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3 - \beta\mathbf{y}_1 - \gamma\mathbf{y}_2) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3) - \beta(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1),$$

$$\text{josta } \beta = \frac{(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3)}{(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1)} = \frac{(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3)}{\|\mathbf{y}_1\|^2} \text{ ja yhtälöstä}$$

$$0 = (\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = (\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3 - \beta\mathbf{y}_1 - \gamma\mathbf{y}_2) = (\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3) - \gamma(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2),$$

$$\text{josta } \gamma = \frac{(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3)}{(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2)} = \frac{(\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3)}{\|\mathbf{y}_2\|^2}$$

4. Selvitä määrittelee $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|$ normin luennolla esitetyn mukaisesti, kun $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Vastaus: Kun $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, on $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n| \geq 0$, ja yhtäsuuruus $\|\mathbf{x}\| = 0$ voidaan saavuttaa vain kun $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Lisäksi voidaan helposti todeta, että

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + \dots + |\alpha x_n| = |\alpha| (|x_1| + \dots + |x_n|) = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$$

sekä

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| &= |x_1 + y_1| + \dots + |x_n + y_n| \leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_n| + |y_n| \\ &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}| + |x_n| + |y_1| + \dots + |y_{n-1}| + |y_n| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \end{aligned}$$

5. Olkoon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jokin sisätulo ja $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Osoita suoraan laskemalla, että

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Selitä miksi tätä yhtälöä kutsutaan suunnikassäännöksi.

Vastaus:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \\ &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) + (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= 2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Sääntö on geometrisesti tulkittavissa asettamalla $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ suunnikkaan sivuiksi, jolloin $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ja $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ muodostavat suunnikkaan lävistäjät. Säännön mukaan suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on sama kuin suunnikkaan sivujen neliöiden summa.

Mikäli $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat kohtisuorassa, on $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ ja tällöin kyseessä on Pythagoraan lause (kuviassa esiintyy kaksi suorakulmaista kolmioita joilla on samanpituiset hypotenuusat ja kateetit).

Huomautus: Edellisen tehtävän perusteella sisätulon indusoima normi toteuttaa suunnikassäännön, mutta myös päinvastainen on mahdollista todistaa: Jos normi toteuttaa suunnikassäännön, on olemassa sisätulo joka indusoi normin. Näin ollen suunnikassääntö toimii kriteerinä avaruuden Eukliidisuudelle.

6. Olkoon $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + \dots + |x_n|$. Etsi tapauksessa $n = 2$ jokin esimerkki, jossa edellisessä tehtävässä mainittu suunnikassääntö *ei päde*.

Vastaus: Valitaan esimerkiksi $\mathbf{x} = (1, 0)$ ja $\mathbf{y} = (0, 1)$. Tällöin

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|(1, 1)\|^2 + \|(1, -1)\|^2 = 4 + 4 = 8,$$

mutta

$$2\|(1, 0)\|^2 + 2\|(0, 1)\|^2 = 2 + 2 = 4.$$

7. Polynomit $\{1, x, x^2\}$ generoivat kolmiulotteisen vektoriavaruuden. Määritellään tässä avaruudessa sisätulo seuraavasti:

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

Laske $(1, x)$, $(1, x^2)$ ja (x, x^2) .

Vastaus:

$$(1, x) = \int_0^1 1 \cdot x \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2},$$

$$(1, x^2) = \int_0^1 1 \cdot x^2 \, dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3},$$

ja

$$(x, x^2) = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x^4 = \frac{1}{4}.$$

8. Olkoon sisätulo sama kuin edellisessä tehtävässä. Etsi jokin 1. asteen polynomi, joka on kohtisuorassa vakiopolynomia 1 vastaan.

Vastaus: Jos esimerkiksi valitaan $p(x) = x + b$, niin ehto $(p, 1) = 0$ saavutetaan kun

$$0 = \int_0^1 (x + b) \cdot 1 \, dx = \int_0^1 x \, dx + \int_0^1 b \, dx = \frac{1}{2} + b,$$

mikä toteutuu kun $b = -\frac{1}{2}$.

9. Määritellään jatkuville reaalfunktioille sisätulo ehdolla

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} fg.$$

Selvitä ovatko funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ ortogonaalit tämän sisätulon suhteen. Entä ovatko funktiot $\sin x$ ja $\sin 2x$ ortogonaalit saman sisätulon suhteen?

Vastaus:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} \cos 2x \\ &= -\frac{1}{4}(\cos 2 \cdot 2\pi - \cos 0) = -\frac{1}{4}(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Tulokaavan perusteella saadaan

$$\int_0^{2\pi} \sin 2x \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x \right) = 0,$$

joten myös $\sin 2x$ ja $\sin x$ ovat ortogonaalit.