

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 4, 8.2.2022

1. Laske demokerran 3 tehtävässä 7 esiintyvien funktioiden väliset kulmat.
2. Etsi kolmen funktion ortogonaali joukko, joka generoi saman vektoriavaruuden kuin demokerran 3 tehtävän 7 funktiot $\{1, x, x^2\}$. Ohje: Voit tukeutua tehtäviin 2 ja 3.
3. Totea, että matriisi

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

määrittelee Hermiten pistetulon säilyttävän lineaarikuvauksen $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$.

4. Osoita, että vektorit $(1, 0, 1, 1, 0)$ ja $(0, 1, 1, 0, 1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat avaruudessa $\mathbb{F}_2^5$. Luettele vektorit, jotka kuuluvat näiden generoimaan aliavaruuteen C ja totea suoraan laskemalla, että aliavaruuteen C kuuluvien vektoreiden välinen Hamming-etäisyys on ainakin 3.
5. Valitaan edellisen tehtävän vektorit koodin generoijamatriisiin riveiksi: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja määritellään koodausfunktio $\mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^5$ seuraavasti: $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}G$, missä $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^2$ käsitetään rivivektoriksi. Määritä kaikkien avaruuden $\mathbb{F}_2^2$ alkioden kuvat.
6. Muodosta edellisen tehtävän koodille tarkistusmatriisi. Ohje. Jos G on muotoa $G = (I \ G_1)$, niin tarkistusmatriisi saadaan muodossa $H = (G_1^T \ I)$. Totea suoraan laskemalla, että $GH^T = O$ (nollamatriisi). Laske myös $H(1, 0, 1, 1, 0)^T$ ja $H(1, 0, 1, 1, 1)^T$.
7. Laske edellisen tehtävän tarkistusmatriisin avulla koodille syndromeja $H\mathbf{x}^T$ alkaen avaruuden $\mathbb{F}_2^5$ Hamming-painon suhteen kevyimmistä alkioista $\mathbf{x}$ niin kauan, että kaikki 8 syndromia on löydetty. Vihje 1: Mitä huomaat Hamming-painon 1 omaavien sanojen $\mathbf{x}$ syndromeista? Vihje 2: Hamming-painossa 2 kannattaa aloittaa sanoista $(0, 0, 0, 1, 1)$ ja $(1, 0, 0, 0, 1)$.
8. Valitse jokin alkio $\mathbf{x} \neq (0, 0)$ avaruudesta $\mathbb{F}_2^2$ ja laske tälle vastaava koodisana $\mathbf{x}G \in \mathbb{F}_2^5$. Valitse myös jokin luonnollisen kannan vektori $\mathbf{e}_i \in \mathbb{F}_2^5$ ja laske $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i$. Mikä tulkinta on vektorilla $\mathbf{x}'$?
9. Laske vektoria $\mathbf{x}'$ vastaava syndromi ja päättelä sen perusteella missä kohtaa vektoria $\mathbf{x}$ on tapahtunut bittivirhe.