

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 4, 8.2.2022

1. Laske demokerran 3 tehtävässä 7 esiintyvien funktioiden väliset kulmat.

Vastaus: Kulmien kosinit saadaan seuraavista lausekkeista: $\frac{(1,x)}{\|1\|\|x\|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}$,

$\frac{(1,x^2)}{\|1\|\|x^2\|} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}}$, $\frac{(x,x^2)}{\|x\|\|x^2\|} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{1}{5}}}$. Tässä jokainen normi on laskettavissa

sisätulon avulla, esim $\|x^2\|^2 = (x^2, x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx = \int_0^1 x^4 dx = \left/ \frac{1}{5} x^5 \right|_0^1 =$

$\frac{1}{5}$, jne. Näin ollen kulmien kosinit ovat siis $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866025 \dots$, $\frac{\sqrt{5}}{3} = 0.775356 \dots$

ja $\frac{\sqrt{15}}{4} = 0.968246 \dots$

Näistä saadaan myös kulmat, jotka (radiaaneina) ovat $\frac{\pi}{6} = 0.523599 \dots$, $0.729728 \dots$ ja $0.25268 \dots$

2. Etsi kolmen funktion ortogonaali joukko, joka generoi saman vektoriavaruuden kuin demokerran 3 tehtävän 7 funktiot $\{1, x, x^2\}$. Ohje: Voit tukeutua tehtäviin 2 ja 3.

Vastaus: Ensimmäinen funktio y_1 voidaan valita $y_1 = 1$. Toinen voidaan valita demotehtävän III/2 mukaisesti: $y_2 = x - \alpha 1$, missä $\alpha = \frac{(1,x)}{\|1\|^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$, joten $y_2 = x - \frac{1}{2}$.

Kolmatta funktiota $y_3 = x^2 - \beta y_1 - \gamma y_2$ varten pitää laskea kertoimet $\beta = \frac{(y_1, x^2)}{\|y_1\|^2} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$ ja $\gamma = \frac{(y_2, x^2)}{\|y_2\|^2} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = 1$.

3. Totea, että matriisi

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

määrittelee Hermiten pistetulon säilyttävän lineaarikuvauksen $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$.

Vastaus:

$$H_2 \cdot H_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Väite seuraa tästä.

4. Osoita, että vektorit $(1, 0, 1, 1, 0)$ ja $(0, 1, 1, 0, 1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat avaruudessa $\mathbb{F}_2^5$. Luettele vektorit, jotka kuuluvat näiden generoimaan aliavaruuteen C ja totea suoraan laskemalla, että aliavaruuteen C kuuluvien vektoreiden välinen Hamming-etäisyys on ainakin 3. Aliavaruuteen kuuluvat siis nollavektorin lisäksi vektorit $(1, 0, 1, 1, 0)$ ja $(0, 1, 1, 0, 1)$

Vastaus: Vektorit ovat selvästikin riippumattomat koska jälkimmäisen vektorin ensimmäisessä koordinaatissa esiintyvää nollaa ei voi saada ykköseksi millään kertomalla. Edelleen, ainoa mahdollinen epätriviaali lineaarikombinaatio on näiden summa $(1, 1, 0, 1, 1)$ joten avaruus C koostuu neljästä vektorista. Aliavaruuden vektorit ovat siis $(0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0, 1)$ ja $(1, 1, 0, 1, 1)$. Laskettuna yksitellen näiden Hamming-etäisyydet toisiinsa nähden voidaan todeta, että etäisyys on vähintään 3.

5. Valitaan edellisen tehtävän vektorit koodin generoijamatriisin riveiksi: $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja määritellään koodausfunktio $\mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^5$ seuraavasti: $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}G$, missä $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^2$ käsitetään rivivektoriksi. Määritä kaikkien avaruuden $\mathbb{F}_2^2$ alkioiden kuvat.

Vastaus: Kun G on yllä mainitulla tavalla muodostettu, on $(0,0)G = (0,0,0,0,0)$, $(0,1)G = (0,1,1,0,1)$, $(1,0)G = (1,0,1,1,0)$ ja $(1,1)G = (1,1,0,1,1)$

6. Muodosta edellisen tehtävän koodille tarkistusmatriisi. Ohje. Jos G on muotoa $G = (I \ G_1)$, niin tarkistusmatriisi saadaan muodossa $H = (G_1^T \ I)$. Totea suoraan laskemalla, että $GH^T = O$ (nollamatriisi). Laske myös $H(1,0,1,1,0)^T$ ja $H(1,0,1,1,1)^T$.

Vastaus: Luennolla esitetyn tavan mukaaan tarkistusmatriisi on muotoa

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tällöin myös

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Laske edellisen tehtävän tarkistusmatriisin avulla koodille syndromeja $H\mathbf{x}^T$ alkaen avaruuden $\mathbb{F}_2^5$ Hamming-painon suhteen kevyimmistä alkioista $\mathbf{x}$ niin kauan, että kaikki 8 syndromia on löydetty. Vihje 1: Mitä huomaat Hamming-painon 1 omaavien sanojen $\mathbf{x}$ syndromeista? Vihje 2: Hamming-painossa 2 kannattaa aloittaa sanoista $(0,0,0,1,1)$ ja $(1,0,0,0,1)$.

Vastaus: Aloitetaan syndromien laskeminen nollapainoisesta vektorista $(0,0,0,0,0)$ alkaen, jolloin aluksi tietysti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Samoin laskemalla voidaan siis huomata, että 1-painoisten vektorien syndromit ovat tarkistusmatriisin sarakkeet. Listasta vielä puuttuvat syndromit saadaan laskemalla vihjeen 2 mukaiset summat.

8. Valitse jokin alkio $\mathbf{y} \neq (0, 0)$ avaruudesta $\mathbb{F}_2^2$ ja laske tälle vastaava koodisana $\mathbf{x} = \mathbf{y}G \in \mathbb{F}_2^5$. Valitse myös jokin luonnollisen kannan vektori $\mathbf{e}_i \in \mathbb{F}_2^5$ ja laske $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i$. Mikä tulkinta on vektorilla $\mathbf{x}'$?

Vastaus: Jos valitaan esim. $\mathbf{y} = (1, 0)$, on sitä vastaava koodisana

$$(1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 1, 1, 0)$$

Valitaan lisäksi vaikka $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$, jolloin $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{e}_2 = (1, 1, 1, 1, 0)$ ja tulkintana on tällöin se, että 5-pituudessa lohossa on tapahtunut virhe 2. bitissä.

Huom: Tehtävän 8 muotoilua korjattu 10.2.

9. Laske vektoria $\mathbf{x}'$ vastaava syndromi ja päättele sen perusteella missä kohtaa vektoria $\mathbf{x}$ on tapahtunut bittivirhe.

Vastaus: Syndromi on

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

joten aiemmassa vaiheessa lasketun syndromipankin perustella voidaan todeta, että koska $H\mathbf{e}_2 = (1, 0, 1)^T$, on virhe tapahtunut vektorin $\mathbf{e}_2$ määrittämässä bitissä.