

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 5, 15.2.2022

1. Olkoon G graafi, jonka pisteiden joukko on $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ja viivojen joukko $E = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2)\}$. Piirrä esitys graafille G ja määritä G :n vierusmatriisi A .
2. Laske A^2 ja A^3 ja esitä näille tulkinnot.
3. Aseta luentoruudulla 3.2. s. 19 esiintyvät Suomen kaupungit johonkin järjestykseen ja kirjoita graafille vierusmatriisi, jossa leimoina ovat kaupunkien väliset matka-ajat.
4. Olkoot $M_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ja $M_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ stokastisen automaatin määrittävät matriisit, $\mathbf{x} = (1, 0)^T$ sen alkudistributio, sekä $(1, 0)$ lopputilavektori.
Piirrä luentoruudun 3.2. s. 21 kaltainen graafiesitys automaattista ja laske syötesanan ab hyväksymistodennäköisyys.
5. Mikä on todennäköisyys sille, että kahta tavallista noppaa heittämällä saadaan yhteenlaskettuna parillinen silmäluku?
6. Mikä on todennäköisyys sille, että kahta tavallista noppaa heittämällä saadaan yhteenlaskettuna parillinen silmäluku joka ei ylitä lukua 4?
7. 50% sadepäivistä alkaa pilvisellä aamulla ja 40% päivistä alkavat pilvisellä aamulla. Kuitenkin vain 10% päivistä on sadepäiviä. Mikä on sateen todennäköisyys jos aamu on pilvinen?
Ohje: Käytä esim. symbolia S merkitsemään sadepäivää ja P merkitsemään pilvistä aamua. Kysytty todennäköisyys on tällöin $\mathbb{P}(S \mid P)$, ja tämän selvittämiseksi voi käyttää Bayesin lausetta.
8. Määritellään ns. *suorakulmainen pulssi* seuraavasti:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{jos } |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{jos } |x| = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Piirrä funktion $\Pi(x)$ kuvaaja ja totea että se on (jatkuva) todennäköisyysjakauma. Laske tätä jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi.

9. Painotetulla kolikolla saadaan kruuna 60% ja klaava 40% todennäköisyydellä. Mikä on todennäköisyys että saadaan ainakin kolme klaavaa, kun kolikkoa heitetään 4 kertaa?