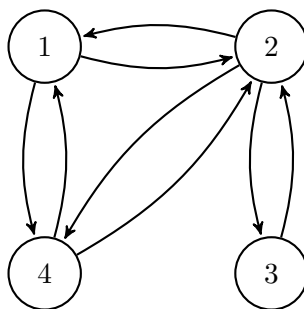


Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 5, 15.2.2022

1. Olkoon G graafi, jonka pisteiden joukko on $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ja viivojen joukko $E = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2)\}$. Piirrä esitys graafille G ja määritä G :n vierusmatriisi A .

Vastaus: Yksi mahdollinen visuaalinen esitys on



Ja vierusmatriisi on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Laske A^2 ja A^3 ja esitä näille tulkinnat.

Vastaus: Suoraan laskemalla saadaan

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ja } A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tulkinta on seuraava: Siinä missä vierusmatriisi A ilmaisee nuolen eli 1-mittaisen polun matriisin pisteiden välillä, A^2 ilmaisee 2-mittaisen polkujen lukumäärän matriisin pisteiden välillä. Esimerkiksi alkio $(1, 1)$ (vasen yläkulma) matriisissa A ilmaisee, että ei ole 1-mittaista polkua pisteestä 1 pisteeseen 1, mutta vastaava matriisin A^2 alkio kertoo, että 2-mittaisia polkuja on 2 kpl, kuten kuvasta helposti nähdään.

Samoin A^3 kertoo 3-mittaisen polkujen määrät pisteiden välillä. Esimerkiksi pisteestä 1 pisteeseen 2 on 4 kpl 3-mittaisia polkuja (etsi nämä!).

3. Aseta luentoruuudulla 3.2. s. 19 esiintyvät Suomen kaupungit johonkin järjestykseen ja kirjoita graafille vierusmatriisi, jossa leimoina ovat kaupunkien väliset matka-ajat.

Vastaus: Jos numeroidaan kaupungit etelästä pohjoiseen, saadaan

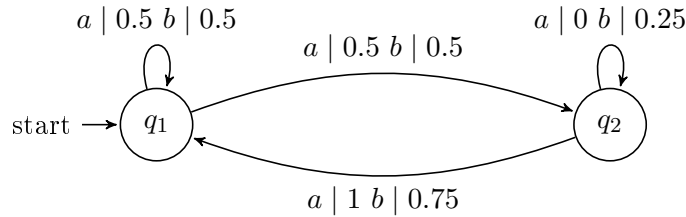
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 110 & 120 & 180 & 0 & 0 \\ 110 & 0 & 120 & 0 & 240 & 0 \\ 120 & 120 & 0 & 120 & 170 & 0 \\ 200 & 0 & 120 & 0 & 200 & 240 \\ 0 & 230 & 170 & 200 & 0 & 230 \\ 0 & 0 & 0 & 240 & 230 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriisi voi olla myös tämän transpoosi, riippuen siitä miten vierusmatriisi käsitetään.

4. Olkoot $M_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ja $M_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ stokastisen automaatin määrittävät matriisit, $\mathbf{x} = (1, 0)^T$ sen alkudistributio, sekä $(1, 0)$ lopputilavektori.

Piirrä luentoruudun 3.2. s. 21 kaltainen graafiesitys automaatista ja laske syötesanan ab hyväksymistodennäköisyys.

Vastaus: graafi voi olla esimerkiksi seuraavan kuvan kaltainen:



Syötesanan ab hyväksymistodennäköisyys on

$$(1, 0)M_bM_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{8}$$

5. Mikä on todennäköisyys sille, että kahta tavallista noppaa heittämällä saadaan yhteenlaskettuna parillinen silmäluku?

Vastaus: Tapa 1: piirretään luennolla esiintynyt 6×6 -kaavio ja lasketaan kuinka monta kaavion 36:sta ruudusta edustaa parillista silmälukua. Tulos on 18, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Tapa 2: Luennolla todettiin, että yhden nopan heitolla sekä parillisen että parittoman silmäluvun todennäköisyys on $\frac{1}{2}$. Kahden nopan heitossa parillinen silmäluku saavutetaan kun joko molemmat ovat parittomia tai molemmat parillisia. Näin ollen kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(1. \text{ pariton}) \cdot \mathbb{P}(2. \text{ pariton}) + \mathbb{P}(1. \text{ parillinen}) \cdot \mathbb{P}(2. \text{ parillinen}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6. Mikä on todennäköisyys sille, että kahta tavallista noppaa heittämällä saadaan yhteenlaskettuna parillinen silmäluku joka ei ylitä lukua 4?

Vastaus: Kun lasketaan edellisen kohdan tavan 1 mukaisesta taulukosta kaikki jälkimmäisen ehdon toteuttavat ruudut, huomataan että niiden yhteislukumäärä on 4. Tällöin kysytty todennäköisyys on $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

7. 50% sadepäivistä alkaa pilvisellä aamulla ja 40% päivistä alkavat pilvisellä aamulla. Kuitenkin vain 10% päivistä on sadepäiviä. Mikä on sateen todennäköisyys jos aamu on pilvinen?

Ohje: Käytä esim. symbolia S merkitsemään sadepäivää ja P merkitsemään pilvistä aamua. Kysytty todennäköisyys on tällöin $\mathbb{P}(S \mid P)$, ja tämän selvittämiseksi voi käyttää Bayesin lausetta.

Vastaus: Tehtävän ehtojen mukaan $\mathbb{P}(P \mid S) = 50\%$, $\mathbb{P}(P) = 40\%$ ja $\mathbb{P}(S) = 10\%$. Bayesin lauseen mukaan

$$\mathbb{P}(S \mid P) = \frac{\mathbb{P}(S) \cdot \mathbb{P}(P \mid S)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{0,1 \cdot 0,5}{0,4} = 0,125.$$

8. Määritellään ns. *suorakulmainen pulssi* seuraavasti:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{jos } |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{jos } |x| = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Piirrä funktion $\Pi(x)$ kuvaaja ja totea että se on (jatkuva) todennäköisyysjakauma. Laske tätä jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi.

Vastaus: Koska $\Pi(x) \geq 0$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dx = 1$, täyttää Π todennäköisyysjakauman ehdot.

Odotusarvo saadaan integraalina

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\Pi(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x dx = \left/ \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right) = 0. \right.$$

ja varianssi integraalina

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-0)^2 \Pi(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \left/ \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{12}. \right.$$

9. Painotetulla kolikolla saadaan kruuna 60% ja klaava 40% todennäköisyydellä. Mikä on todennäköisyys että saadaan ainakin kolme klaavaa, kun kolikkoa heitetään 4 kertaa?

Vastaus: Binomijakauman mukaisesti

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{ainakin 3 klaavaa}) &= \mathbb{P}(3 \text{ klaavaa}) + \mathbb{P}(4 \text{ klaavaa}) \\ &= \binom{4}{3} \left(\frac{4}{10} \right)^3 \left(\frac{6}{10} \right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{4}{10} \right)^4 \left(\frac{6}{10} \right)^0 \\ &= \frac{112}{625} = 0,1792 \end{aligned}$$