

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 6, 22.2.2022

1. Pankki kirjaa keskimäärin 35 yritystä maksukyvyttömäksi joka vuosi. Käytä Poissonin jakaumaa arvioidaksesi millä todennäköisyydellä pankki kirjaa jonkin kuukauden aikana vähintään 4 yritystä maksukyvyttömäksi.
2. Kaivovettä pidetään juomakelpoisena, mikäli kolibakteereja esiintyy korkeintaan 100 pmy/100 ml.¹ Jos 5 ml näytteestä löytyy 8 pmy kolibakteeria, mikä on todennäköisyys sille, että kaivovesi on juomakelpoista? Käytä Poissonin jakaumaa arviointiin.
3. Yrityksen asiakaspalveluun saapuu puhelu keskimäärin joka kymmenes minuutti, ja puhelujen väliajat noudattavat eksponenttijakaumaa.
 - a) Määritä parametri v tiheysfunktioille $f(t) = ve^{-vt}$. Ajan yksikkönä käytetään minuuttia.
 - b) Mikä on todennäköisyys sille, että äsken saapuneen puhelun jälkeen seuraava saapuu aikaisintaan 15 minuutin päästä?
 - c) Jos aiempi puhelu saapui 5 minuuttia sitten, mikä on todennäköisyys sille, että seuraava saapuu aikaisintaan 10 minuutin päästä?
4. Yritys valmistaa Led-lamppuja, joiden kestoikä on likimain normaalisti jakautunut, odotusarvon ollessa $\mu = 25000$ ja keskihajonnan $\sigma = 3000$ (aikayksikkönä tunti).
 - a) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää yli 30000 tuntia?
 - b) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää alle 15000 tuntia?
 - c) Mikä on kesto aika, jonka ylittää vain 1% lampuista?

Ohje: Matlabissa standardoidun normaalijakauman kertymäfunktion käänteisfunktio saadaan muodossa

$$\text{norminv}(p).$$
5. Hyllyissä on tilaa kirjoille yhteensä 100 m. Yhden kirjan paksuus on keskimäärin $\mu = 3$ cm ja paksuuden keskihajonta $\sigma = 0,5$ cm. Arvioi millä todennäköisyydellä 3200 kirjaa ei mahdu hyllyihin.

Ohje: Jos X_i on kirjan i paksuus, on yhteispaksuus $X_1 + \dots + X_{3200}$. Käytä keskeistä raja-arvolauseetta.
6. Kun heitetään noppaa 1000 kertaa, saadaan yli 200 kertaa silmäluku 6. Arvioi tällaisen tapahtuman todennäköisyyttä, mikäli noppa on tasapainottamaton.

Ohje: Voit määritellä satunnaismuuttujan X joka saa kaksi arvoa: 0, jos silmäluku on ≤ 5 ja 1, jos silmäluku on 6 ja soveltaa keskeistä raja-arvolauseetta.

Vaihtoehtoisesti todennäköisyyttä voi arvioida binomijakaumaa käyttäen.
7. Olkoot $\mathbf{x} = (1, 2, 4, 3, 1)$ ja $\mathbf{y} = (3, 3, 1, 2, 4)$. Laske $\text{Corr}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ luennolla esitetyn tavan mukaisesti.

¹pmy=pesäkettä muodostava yksikkö

8. Olkoot $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ kuten edellä. Laske kovarianssimatriisi

$$\Sigma = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' & \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}' \cdot \mathbf{x}' & \mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}' \end{pmatrix}$$

numeerisesti, käyttäen esim. Matlabia.

9. Määritä edellisen tehtävän kovarianssimatriisille similaarinen diagonaalimatriisi $\Lambda = B^{-1}\Sigma B$ sekä similaarisuuden välittävä matriisi B käyttämällä esim. Matlabia.