

Insinöörimatematiikka 3

Demonstraatio 6, 22.2.2022

1. Pankki kirjaa keskimäärin 35 yritystä maksukyvyttömäksi joka vuosi. Käytä Poissonin jakaumaa arvioidaksesi millä todennäköisyydellä pankki kirjaa jonkin kuukauden aikana vähintään 4 yritystä maksukyvyttömäksi.

Vastaus: Odotusarvo $\lambda = 35/12 = 2.9166\dots$ ja jos merkitään maksukyvyttömiä yritysten lukumäärää satunnaismuuttujalla X , on

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X < 4) = 1 - e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} \right) = 0.3341\dots$$

2. Kaivovettä pidetään juomakelpoisena, mikäli kolibakteereja esiintyy korkeintaan 100 pmy/100 ml.¹ Jos 5 ml näytteestä löytyy 8 pmy kolibakteeria, mikä on todennäköisyys sille, että kaivovesi on juomakelpoista? Käytä Poissonin jakaumaa arviointiin.

Vastaus: 5 ml näytteestä juomakelpoista vettä löytyy odotusarvona korkeintaan $\lambda = 5$ pmy kolibakteeria. Todennäköisyys sille, että niitä löytyy 8 pmy on

$$e^{-5} \frac{5^8}{8!} = 0.06527\dots$$

3. Yrityksen asiakaspalveluun saapuu puhelu keskimäärin joka kymmenes minuutti, ja puhelujen väliajat noudattavat eksponenttijakaumaa.
 - a) Määritä parametri v tiheysfunktiolle $f(t) = ve^{-vt}$. Ajan yksikkönä käytetään minuuttia.
 - b) Mikä on todennäköisyys sille, että äsken saapuneen puhelun jälkeen seuraava saapuu aikaisintaan 15 minuutin päästä?
 - c) Jos aiempi puhelu saapui 5 minuuttia sitten, mikä on todennäköisyys sille, että seuraava saapuu aikaisintaan 10 minuutin päästä?

Vastaus: a) Eksponenttijakauman odotusarvo on parametrin v käänteisluku, siis $v = \frac{1}{10}$

b)

$$\mathbb{P}(T \geq 15) = 1 - \mathbb{P}(T < 15) = 1 - (1 - e^{-v \cdot 15}) = e^{-\frac{15}{10}} = 0.22313\dots$$

c) Samoin kuin yllä saadaan

$$\mathbb{P}(T \geq 10) = e^{-\frac{10}{10}} = 0.36787\dots$$

ja muistittomuusominaisuuden perusteella

$$\mathbb{P}(T \geq 5 + 10 \mid T \geq 5) = \mathbb{P}(T \geq 10) = 0.36787\dots$$

Huomautus: Jatkuvalle jakaumalle $\mathbb{P}(T < a) = P(T \leq a)$ (miksi?)

¹pmy=pesäkettä muodostava yksikkö

4. Yritys valmistaa Led-lamppuja, joiden kestoikä on likimain normaalisti jakautunut, odotusarvon ollessa $\mu = 25000$ ja keskihajonnan $\sigma = 3000$ (aikayksikönä tunti).

- a) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää yli 30000 tuntia?
b) Millä todennäköisyydellä lamppu kestää alle 15000 tuntia?
c) Mikä on kesto aika, jonka ylittää vain 1% lamppuista?

Ohje: Matlabissa standardoidun normaalijakauman kertymäfunktion käänteisfunktio saadaan muodossa

`norminv(p)`.

Vastaus: a)

$$\mathbb{P}(T > 30000) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 30000) = 1 - \Phi\left(\frac{30000 - 25000}{3000}\right) = 0.047790 \dots$$

b)

$$\mathbb{P}(T \leq 15000) = \Phi\left(\frac{15000 - 25000}{3000}\right) = 0.0004290 \dots$$

c) Merkitään kysyttyä kesto aikaa τ :lla. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > \tau) = 0.01 &\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(T \leq \tau) = 0.01 \Leftrightarrow \mathbb{P}(T \leq \tau) = 0.99 \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\tau - 25000}{3000}\right) = 0.99 \\ &\Leftrightarrow \frac{\tau - 25000}{3000} = \Phi^{-1}(0.99) = 2.3263 \dots \end{aligned}$$

Tästä saadaan $\tau \approx 31979$.

5. Hyllyissä on tilaa kirjoille yhteensä 100 m. Yhden kirjan paksuus on keskimäärin $\mu = 3$ cm ja paksuuden keskihajonta $\sigma = 0,5$ cm. Arvioi millä todennäköisyydellä 3200 kirjaa ei mahdu hyllyihin.

Ohje: Jos X_i on kirjan i paksuus, on yhteispaksuus $X_1 + \dots + X_{3200}$. Käytä keskeistä raja-arvolauseetta.

Vastaus: On arvioitava, millä todennäköisyydellä satunnaismuuttujan

$$P = X_1 + \dots + X_{3200}$$

arvo on suurempi kuin 10000 cm. Satunnaismuuttujan P odotusarvo on $3200 \cdot 3 = 9600$ ja sen varianssi $3200 \cdot 0.5^2 = 800$. Keskeisen raja-arvolauseen mukaan P on likimain normaalisti jakautunut, joten kysytty todennäköisyys on

$$\mathbb{P}(P > 10000) = 1 - \mathbb{P}(P \leq 10000) \approx 1 - \Phi\left(\frac{10000 - 9600}{\sqrt{800}}\right) \approx 0$$

6. Kun heitetään noppaa 1000 kertaa, saadaan yli 200 kertaa silmäluku 6. Arvioi tällaisen tapahtuman todennäköisyyttä, mikäli noppa on tasapainottamaton.

Ohje: Voit määritellä satunnaismuuttujan X joka saa kaksi arvoa: 0, jos silmäluku on ≤ 5 ja 1, jos silmäluku on 6 ja soveltaa keskeistä raja-arvolauseetta.

Vaihtoehtoisesti todennäköisyyttä voi arvioida binomijakaumaa käyttäen.

Vastaus: Oletetaan, että noppa on tasapainoitettu ja määritellään satunnaismuuttuja yllä olevan ohjeen mukaisesti. Tällöin $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{5}{6}$ ja $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}$. Silloin $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ ja $\mathbb{E}(X^2) = \frac{5}{6} \cdot 0^2 + \frac{1}{6} \cdot 1^2 = \frac{1}{6}$, joten $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$.

Merkitään heiton i silmälukua satunnaismuuttujalla S_i ja $S = S_1 + \dots + S_{1000}$. On siis arvioitava, millä todennäköisyydellä $S > 200$.

Edellämainitun perusteella $\mathbb{E}(S) = 1000 \cdot \frac{1}{6} = 166.66\dots$ ja $\text{Var}(S) = 1000 \cdot \frac{5}{36} = \frac{1250}{9} = 138.88\dots$. Keskeisen raja-arvolauseen mukaan satunnaismuuttujan S jakaumaa voidaan approksimoida normaali-jakaumalla, joten

$$\mathbb{P}(S > 200) = 1 - \mathbb{P}(S \leq 200) \approx 1 - \Phi\left(\frac{200 - \frac{1000}{6}}{\sqrt{\frac{1250}{9}}}\right) = 0.002338\dots$$

7. Olkoot $\mathbf{x} = (1, 2, 4, 3, 1)$ ja $\mathbf{y} = (3, 3, 1, 2, 4)$. Laske $\text{Corr}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ luennolla esitetyn tavan mukaisesti.

Vastaus: Keskiarvot ovat $\mu_{\mathbf{x}} = \frac{11}{5}$ ja $\mu_{\mathbf{y}} = \frac{13}{5}$. Tällöin siirretyt vektorit ovat $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}}\mathbf{1} = \frac{1}{5}(-6, -1, 9, 4, -6)$ ja $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mu_{\mathbf{y}}\mathbf{1} = \frac{1}{5}(2, 2, -8, -3, 7)$.

Korrelaatiokerroin saadaan vektoreiden $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{y}'$ välisen kulman kosinina: Koska $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' = -\frac{28}{5}$, $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = \frac{34}{5}$ ja $\mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}' = \frac{26}{5}$, on

$$\text{Corr}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}'}{\|\mathbf{x}'\| \|\mathbf{y}'\|} = \frac{-\frac{28}{5}}{\sqrt{\frac{34}{5}} \sqrt{\frac{26}{5}}} = -\frac{28}{\sqrt{34 \cdot 26}} = -0.94174\dots$$

8. Olkoot $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ kuten edellä. Laske kovarianssimatriisi

$$\Sigma = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' & \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}' \cdot \mathbf{x}' & \mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}' \end{pmatrix}$$

numeerisesti, käyttäen esim. Matlabia.

Vastaus: Matriisi on

$$\Sigma = \frac{1}{5^2} \begin{pmatrix} 34 & -28 \\ -28 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.36 & -1.12 \\ -1.12 & 1.04 \end{pmatrix}.$$

9. Määritä edellisen tehtävän kovarianssimatriisille similaarinen diagonaalimatriisi $\Lambda = B^{-1}\Sigma B$ sekä similaarisuuden välittävä matriisi B käyttämällä esim. Matlabia.

Vastaus: Esim. Matlabilla voidaan laskea seuraavasti:

```
>> S=[1.36,-1.12;-1.12,1.04]
```

```
S =
```

```
    1.3600    -1.1200
   -1.1200     1.0400
```

```
>> [B,L]=eig(S)
```

```
B =
```

$$\begin{array}{cc} -0.6552 & -0.7555 \\ -0.7555 & 0.6552 \end{array}$$

$L =$

$$\begin{array}{cc} 0.0686 & 0 \\ 0 & 2.3314 \end{array}$$

Tämä merkitsee sitä, että matriisille Σ (jota Matlabissa merkittiin symbolilla S) löytyy similaarinen diagonaalimatriisi Λ (Matlabissa L), approksimatiivisesti esitettynä

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.0686 & 0 \\ 0 & 2.3314 \end{pmatrix}$$

Similaarisuuden välittävä matriisi $B = \begin{pmatrix} -0.6552 & -0.7555 \\ -0.7555 & 0.6552 \end{pmatrix}$.

Huom. Muodosta uudet vektorit $\mathbf{x}_1 = -0.6552\mathbf{x}' - 0.7555\mathbf{y}'$ ja $\mathbf{y}_1 = -0.7555\mathbf{x}' + 0.6552\mathbf{y}'$ (kertoimet ovat siis matriisista B). Mitä huomaat vektoreiden $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{y}_1$ pistetulosta?