

Insinöörimatematiikka 3

Nämä demotehtävät ovat itsenäistä harjoittelua varten. Näistä ei järjestetä demotilaisuutta eikä jaeta demopisteitä.

1. Selvitä suppenevatko seuraavat sarjat:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n^2}{2}} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}}$$

2. Selvitä kaikki luvut x , joille sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$$

suppenee.

3. Mitä osamäärätarkastin kertoo sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$$

suppemisesta?

4. Suppenevatko seuraavat sarjat?

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

5. Olkoon $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Osoita laskemalla Cauchyn tulo, että $E(x)E(y) = E(x+y)$.

6. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

summa.

Vastaus: Esityksestä

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

saadaan derivoimalla

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

josta

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Derivoimalla edelleen saadaan

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

ja edelleen

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Sijoittamalla $x = \frac{1}{2}$ edellisiin saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

7. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n},$$

summa.

Vastaus: Esityksestä

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

saadaan yli välin $[0, x]$ integroimalla

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Integroimalla esitys

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

puolittain saadaan

$$\int_0^x -\ln(1-t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n} dt,$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x + (1-x) \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

ja edelleen

$$1 + \frac{(1-x)}{x} \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Sijoittamalla $x = \frac{1}{2}$ saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = 1 - \ln 2.$$

8. Olkoon $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 1, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$ Etsi Maclaurinin sarja funktioille $f(x)$ ja $f'(x)$. Selvitä jälkimmäisen avulla sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n-1}}{(n+1)!}$$

summa.

9. Olkoon $f(x) = xe^x$. Etsi Maclaurinin sarja funktioille $f(x)$ ja $\int_0^x f(t) dt$. Selvitä jälkimmäisen avulla sarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{n!(n+2)}$$

summa.

10. Etsi Fourier-sarja (myös reaalinen muoto) välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [-\pi, 0], \\ -1, & \text{kun } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Ohje: $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, kun $n \in \mathbb{Z}$.

Missä pisteissä Fourier-sarja esittää funktiota f ?

11. Käytä edellisen tehtävän Fourier-sarjaa määrittääksesi funktion

$$g(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{kun } x \in [-\pi, 0] \\ -x + \pi & \text{kun } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

reaalinen Fourier-sarja. Ohje: Piirrä funktioiden f ja g kuvaajat ja selvitä miten nämä funktiot liittyvät toisiinsa.

Osavastaus: $A_n = \frac{4}{\pi n^2}$, kun n on pariton

12. Etsi Fourier-sarja (kompleksinen ja reaalinen muoto) välillä $[0, \pi]$ määritellylle funktiolle $f(x) = \sin x$.