

Insinöörimatematiikka 3

Nämä demotehtävät ovat itsenäistä harjoittelua varten. Näistä ei järjestetä demotilaisuutta eikä jaeta demopisteitä.

1. Selvitä suppenevatko seuraavat sarjat:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{2}} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}}$$

Vastaus: a) Käytetään juuritarkastinta:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{2}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{e}} < 1,$$

joten sarja suppenee.

b) Lasketaan peräkkäisten termien osamäärä:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)!}{\sqrt{(2n+2)!}} : \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} \right| = \left| \frac{n+1}{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1,$$

joten sarja suppenee.

2. Selvitä kaikki luvut x , joille sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$$

suppenee.

Vastaus: Käytetään ensin osamäärätarkastinta:

$$\left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} : \frac{(x-3)^n}{n2^n} \right| = \frac{|x-3|}{2} \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x-3|}{2},$$

mistä nähdään, että sarja suppenee, kun $\frac{|x-3|}{2} < 1$ ja hajaantuu, kun $\frac{|x-3|}{2} > 1$. Toisin sanoen, sarja suppenee kun $x \in (1, 5)$ ja hajaantuu tämän välin ulkopuolella.

Selvitettäväksi jää vielä arvot $x = 1$ ja $x = 5$. Kun $x = 5$, saa sarja muodon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ja siis hajaantuu (harmoninen sarja).

Arvolla $x = 1$ puolestaan sarja saa muodon

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

ja suppenee Leibnizin lauseen perusteella. Täten sarja suppenee kun $x \in [1, 5)$ ja hajaantuu muilla x :n arvoilla.

3. Mitä osamäärätarkastin kertoo sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$$

suppemisesta?

Vastaus: Lasketaan peräkkäisten termien suhde:

$$\left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!x^n}{n^n} \right| = |x| \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{e}.$$

Tästä nähdään, että sarja suppenee, kun $|x| < e$ ja hajaantuu, kun $|x| > e$.

4. Suppenevatko seuraavat sarjat?

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

Vastaus: a) Aina kun $n \geq 2$, on $\ln n < n$, joten $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Näin ollen sarjalla on minoranttina harmoninen sarja, jonka hajaantumisesta seuraa sarjan hajaantuminen.

b) Sarjan jäsenten iseisärvot muodostavat vähenevän jonon, joka lähestyy nollaa. Näin ollen sarja suppenee Leibnizin lauseen perusteella.

5. Olkoon $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Osoita laskemalla Cauchyn tulo, että $E(x)E(y) = E(x+y)$.

Vastaus:

$$\begin{aligned} E(x)E(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{x^n}{n!} \frac{y^{k-n}}{(k-n)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} x^n y^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n y^{k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = E(x+y) \end{aligned}$$

6. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

summa.

Vastaus: Esityksestä

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

saadaan derivoimalla

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

josta

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Derivoimalla edelleen saadaan

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

ja edelleen

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Sijoittamalla $x = \frac{1}{2}$ edellisiin saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

7. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n},$$

summa.

Vastaus: Esityksestä

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

saadaan yli välin $[0, x]$ integroimalla

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Integroimalla esitys

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

puolittain saadaan

$$\int_0^x -\ln(1-t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n} dt,$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$x + (1-x) \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

ja edelleen

$$1 + \frac{(1-x)}{x} \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Sijoittamalla $x = \frac{1}{2}$ saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = 1 - \ln 2.$$

8. Olkoon $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 1, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$ Etsi Maclaurinin sarja funktioille $f(x)$ ja $f'(x)$. Selvitä jälkimmäisen avulla sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n-1}}{(n+1)!}$$

summa.

Vastaus: Koska $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, on $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ja

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Näin ollen

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}.$$

Koska toisaalta $f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$, on

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n-1}}{(n+1)!} = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

9. Olkoon $f(x) = xe^x$. Etsi Maclaurinin sarja funktioille $f(x)$ ja $\int_0^x f(t) dt$. Selvitä jälkimmäisen avulla sarjan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{n!(n+2)}$$

summa.

Vastaus:

$$f(x) = xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!},$$

josta

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x t^{n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+2} x^{n+2}.$$

Koska toisaalta $\int_0^x f(t) dt = e^x(x-1) + 1$, on

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{n!(n+2)} = 4e^5 + 1$$

10. Etsi Fourier-sarja (myös reaalinen muoto) välillä $[-\pi, \pi]$ määritellylle funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in [-\pi, 0], \\ -1, & \text{kun } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

Ohje: $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$, kun $n \in \mathbb{Z}$.

Missä pisteissä Fourier-sarja esittää funktiota f ?

Vastaus: Suoraan laskettuna tapauksessa $n \neq 0$ saadaan

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx - \int_0^{\pi} e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-in} (1 - e^{i\pi n}) - \frac{1}{-in} (e^{-i\pi n} - 1) \right) = -\frac{1 - (-1)^n}{i\pi n}. \end{aligned}$$

Kun $n = 0$, on

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 1 dx + \int_0^{\pi} (-1) dx \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Täten kompleksinen Fourier-sarja on

$$f(x) = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n} e^{inx}.$$

Reaalista muotoa varten lasketaan $A_n = F_n + F_{-n} = 0$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n}) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n}$, joten reaalinen muoto on

$$f(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n} \sin nx.$$

Toinen tapa on soveltaa esimerkkiä 37 (vuoden 2019 moniste). Jos merkitään siinä esiintynyttä funktiota $g(x)$:llä, niin tässä tehtävässä $f(x) = -(2g(x) - 1)$ ja täten

$$f(x) = -2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2\pi in} e^{inx} \right) + 1 = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi in} e^{inx},$$

siis $F_n = \frac{1 - (-1)^n}{\pi in}$. Reaaliset kertoimet saadaan kuten edellä. Sarja esittää funktiota f kaikkialla muualla paitsi epäjatkuvuuspisteissä $x = n \cdot \pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

11. Käytä edellisen tehtävän Fourier-sarjaa määrittääksesi funktion

$$g(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{kun } x \in [-\pi, 0] \\ -x + \pi & \text{kun } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

reaalinen Fourier-sarja. Ohje: Piirrä funktioiden f ja g kuvaajat ja selvitä miten nämä funktiot liittyvät toisiinsa.

Osavastaus: $A_n = \frac{4}{\pi n^2}$, kun n on pariton

Vastaus: $g(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$, joten sen Fourierin sarja on

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \int_{-\pi}^x \sin((2k+1)t) dt \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \left/ \frac{-1}{2k+1} \cos((2k+1)t) \right|_{-\pi}^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} (\cos((2k+1)x) - \cos(2k+1)\pi) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) + C, \end{aligned}$$

missä

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}.$$

Vakion C määrittämiseksi huomataan, että $C = \frac{A_0}{2} = F_0$, missä

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

12. Etsi Fourier-sarja (kompleksinen ja reaalinen muoto) välillä $[0, \pi]$ määritellylle funktiolle $f(x) = \sin x$.

Vastaus: Lasketaan tätä ja seuraavaa tehtävää varten ensin antiderivaatta

$$\begin{aligned} \int \sin x e^{-\alpha x} dx &= \int \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) e^{-\alpha x} dx = \int \frac{1}{2i} (e^{(i-\alpha)x} - e^{-(i+\alpha)x}) dx \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{i-\alpha} e^{(i-\alpha)x} + \frac{1}{i+\alpha} e^{-(i+\alpha)x} \right). \end{aligned}$$

Tällöin (seuraavassa on huomattava, että $e^{i(1-2n)\pi} = e^{-i(1+2n)\pi} = -1$, koska $1-2n$ ja $1+2n$ ovat parittomia)

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x e^{-2inx} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{i-2in} e^{(i-2in)x} + \frac{1}{i+2in} e^{-(i+2in)x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{1-2n} e^{i(1-2n)x} + \frac{1}{1+2n} e^{-i(1+2n)x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1-2n} (e^{i(1-2n)\pi} - 1) + \frac{1}{1+2n} (e^{-i(1+2n)\pi} - 1) \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{2}{1-4n^2}. \end{aligned}$$

Kompleksinen Fourier-sarja on siis

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} e^{2inx}$$

Koska $F_{-n} = F_n$, ovat reaaliset kertoimet $A_n = F_n + F_{-n} = 2F_n = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$ ja $B_n = 0$. Erityisesti $A_0 = \frac{4}{\pi}$ ja siksi

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx).$$