

Insinöörimatematiikka 3

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Määritelmä

Olko U ja V vektoriavaruuksia yli kunnan $\mathbb{K}$. Funktio $f : U \rightarrow V$ on *lineaarinen*, jos

$$f(a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2) = a_1 f(\mathbf{u}_1) + a_2 f(\mathbf{u}_2).$$

Induktiolla:

$$f(a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n) = a_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + a_n f(\mathbf{u}_n)$$

Matriisiesitys

Valitaan avaruudelle U (dim. n) kanta $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ ja avaruudelle V (dim. m) kanta $C = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}$.

Tällöin vektorin $\mathbf{u} = x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$ kuva saadaan muodossa

$$f(x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n) = x_1f(\mathbf{b}_1) + \dots + x_nf(\mathbf{b}_n)$$

Koska C on avaruuden V kanta, voidaan jokainen $f(\mathbf{b}_i)$ esittää muodossa

$$f(\mathbf{b}_i) = a_{1i}\mathbf{c}_1 + \dots + a_{mi}\mathbf{c}_m$$

Matriisiesitys

$$f(x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n) = x_1 f(\mathbf{b}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{b}_n)$$

Koska C on avaruuden V kanta, voidaan jokainen $f(\mathbf{b}_i)$ esittää muodossa

$$f(\mathbf{b}_i) = a_{i1} \mathbf{c}_1 + \dots + a_{im} \mathbf{c}_m$$

Yhdistämällä:

$$\begin{aligned} f(x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n) &= x_1 f(\mathbf{b}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{b}_n) \\ &= x_1 (a_{11} \mathbf{c}_1 + \dots + a_{m1} \mathbf{c}_m) \\ &\quad + \dots + x_n (a_{1n} \mathbf{c}_1 + \dots + a_{mn} \mathbf{c}_m) \\ &= (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n) \mathbf{c}_1 \\ &\quad + \dots + (a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n) \mathbf{c}_m \end{aligned}$$

Määritelmä

Matriisi A on kaavio

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Tyyppi $m \times n$: m riviä, n saraketta.
- A_{ij} : matriisin alkiot
- $A_{ij} \in \mathbb{R}$: reaallinen matriisi
- $A_{ij} \in \mathbb{C}$: kompleksinen matriisi

Skalaarikertolasku

Jos A on $m \times n$ -matriisi ja c joko kompleksi- tai reaaliluku, on cA $m \times n$ -matriisi, jolle pätee $(cA)_{ij} = cA_{ij}$ (kertolasku alkioittain).

Matriisien yhteenlasku

Jos A on $m \times n$ -matriisi ja B $r \times s$ -matriisi, summa $A + B$ määritellään vain jos $m = r$ ja $n = s$. Tällöin

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Huomautus

$m \times n$ -matriisit muodostavat vektoriavaruuden yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun suhteen.

Määritelmä

Jos $f : U \rightarrow V$ on lineaarikuvaus, B ja C avaruuksien U ja V kannat, sekä

$$f(\mathbf{b}_i) = a_{1i}\mathbf{c}_1 + \dots + a_{mi}\mathbf{c}_m,$$

sanotaan, että matriisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

on lineaarikuvauksen f *matriisi* kantojen B ja C suhteen.

Määritelmä

Rivivektori (vaakavektori) on $1 \times n$ matriisi $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$.

Sarakevektori (pystyvektori) on $m \times 1$ matriisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Määritelmä: Matriisikertolasku tapauksessa $m \times n$, $n \times 1$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Huomautus

Olkoon A lineaarikuvauksen $f : U \rightarrow V$ matriisi kantojen B ja C suhteen. Jos $\mathbf{x}$ on alkukuvan koordinaatti(sarake)vektori, saadaan kuvan koordinaatti(sarake)vektori $\mathbf{y}$ matriisikertolaskulla $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

Tiivistelmä

Olkoon B avaruuden U (dim. n) kanta ja C avaruuden V (dim. m) kanta. Tällöin lineaarikuvaus $U \rightarrow V$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ voidaan esittää matriisikertolaskuna

$$\mathbf{y}_C = A\mathbf{x}_B,$$

missä $\mathbf{x}_B \in \mathbb{K}^n$ on vektorin $\mathbf{x} \in U$ ja $\mathbf{y}_C \in \mathbb{K}^m$ on vektorin $\mathbf{y} \in V$ koordinaattivektori ja A on $m \times n$ -matriisi yli kunnan $\mathbb{K}$. Matriisia A sanotaan lineaarikuvauksen f matriisiksi kantojen B ja C suhteen.

Huomautus

Jos $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ ja B ja C luonnollisia kantoja, on $\mathbf{x}_B = \mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}_C = \mathbf{y}$.

Määritelmä: Yleinen matriisikertolasku

Olkoon A $m \times n$ -matriisi ja B $n \times k$ -matriisi. Matriisitulo AB voidaan määritellä seuraavasti: Esitetään B $n \times 1$ sarakkeina: $B = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_k)$, jolloin

$$AB = (A\mathbf{b}_1 \dots A\mathbf{b}_k)$$

on $n \times k$ -matriisi.

Seuraus

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^n A_{il} B_{lj}.$$

Lause

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $a(AB) = (aA)B = A(aB)$
- $AO = OA = O$
- $AI = IA = A,$
- $(AB)^T = B^T A^T,$

edellyttäen että vasemmat puolet ovat määriteltyjä. O on

nollamatriisi ja $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ns. identiteettimatriisi. A^T

merkitsee matriisin A transpoosia, $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Huomautus

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{y}^T = \mathbf{x}^T A^T.$$

Määritelmä

Jos A on neliömatriisi (tyyppi $n \times n$) ja $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, määritellään

$$\begin{cases} A^0 &= I \\ A^n &= A \cdot A \cdot \dots \cdot A \quad (n \text{ kpl}). \end{cases}$$

Lineaarikuvausten yhdistäminen

Olkoot $f : U \rightarrow V$ ja $g : V \rightarrow W$ lineaarikuvauksia, joiden matriisit kiinnitettyjen kantojen B , C ja D suhteen ovat A_f ja A_g . Tällöin f voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{y}_C = A_f \mathbf{x}_B \text{ ja } g \text{ muodossa } \mathbf{z}_D = A_g \mathbf{y}_C,$$

missä $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{y}_C$ ja $\mathbf{z}_D$ ovat vektoreiden $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{z}$ koordinaattivektorit kantojen B , C ja D suhteen.

Yhdistetty kuvaus $g \circ f : U \rightarrow W$ voidaan tällöin esittää muodossa

$$\mathbf{z}_D = A_g \mathbf{y}_C = A_g (A_f \mathbf{x}_B) = (A_g A_f) \mathbf{x}_B,$$

ja täten yhdistetyn kuvauksen $g \circ f : U \rightarrow W$ matriisi saadaan matriisitulona

$$A_{g \circ f} = A_g A_f.$$

Lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Kompaktimpi esitys: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Määritelmä

Olkoon A $n \times n$ -matriisi. Jos on olemassa sellainen $n \times n$ -matriisi B , että $AB = BA = I$, sanotaan, että B on A :n käänteismatriisi ja merkitään $B = A^{-1}$.

Jos A :lla on käänteismatriisi, sanotaan että A on säännöllinen. Muutoin A on singulaarinen.

Huomautus

Voidaan todistaa:

- Neliömatriiseille $AB = I \Rightarrow BA = I$.
- $n \times n$ matriisi A on säännöllinen tarkalleen silloin kun $r(A) = n$.
- A on säännöllinen tarkalleen silloin kun A :n rivit ovat lineaarisesti riippumattomat.

Käänteismatriisin etsiminen

Merkitään $B = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n)$ ja $I = (\mathbf{e}_1^T \dots \mathbf{e}_n^T)$, jolloin yhtälö $AB = I$ saa muodon

$$(A\mathbf{b}_1 \dots A\mathbf{b}_n) = (\mathbf{e}_1^T \dots \mathbf{e}_n^T).$$

Tällöin sarakkeet $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ voidaan löytää ratkaisemalla yhtälöryhmät $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1^T, \dots, A\mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n^T$. Yhtälöryhmä $A\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i^T$ voidaan ratkaista redusoimalla augmentoitu matriisi redusoituun porrasmuotoon: $(A\mathbf{e}_i^T) \sim \dots \sim (I\mathbf{b}_i)$. Redusointi voidaan suorittaa yhtä aikaa kaikille sarakkeille $\mathbf{e}_1^T, \dots, \mathbf{e}_n^T$:

$$(A\mathbf{e}_1^T \dots \mathbf{e}_n^T) \sim \dots \sim (I\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n) = (I A^{-1})$$

Gaussin-Jordanin menetelmä

$$(A \mid I) \sim \dots \sim (I \mid A^{-1})$$

Huomautus

Jos Gaussin-Jordanin menetelmä ei muuta lohkomuodon $(A \mid I)$ vasemmanpuoleista matriisiä A identiteettimatriisiksi, vaan siihen ilmaantuu nollarivi, voidaan todeta että A :lla ei ole käänteismatriisiä.

Esimerkkejä

Esimerkit 53–54 vuoden 2019 Insinöörimatematiikka D monisteessa