

Insinöörimatematiikka 3

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Määritelmä

Olkoon A neliömatriisi. $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin A ominaisarvo, jos on olemassa $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ siten, että

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Jokaista tämän yhtälön toteuttavaa vektoria $\mathbf{x}$ sanotaan ominaisarvoon λ kuuluvaksi ominaisvektoriksi.

Esimerkki

$$I\mathbf{x} = \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x},$$

joten 1 on identiteettimatriisin ominaisarvo ja mikä hyvänsä $\mathbf{x}$ siihen liittyvä ominaisvektori.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seuraus 1

Jos $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, on $A^i\mathbf{x} = \lambda^i\mathbf{x}$.

Seuraus 2

Olkoot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ matriisin A ominaisarvoja ja $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ näihin kuuluvat ominaisvektorit.

Jos

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n,$$

on

$$A\mathbf{x} = a_1A\mathbf{x}_1 + \dots + a_nA\mathbf{x}_n = a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\lambda_n\mathbf{x}_n,$$

ja induktiolla

$$A^i\mathbf{x} = a_1\lambda_1^i\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\lambda_n^i\mathbf{x}_n.$$

Geometrinen tulkinta

- Jokainen $n \times n$ -matriisi A määrittelee lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.
- Jokainen matriisin A ominaisvektori $\mathbf{x}$ vastaa sellaista suuntaa, jossa A toimii "venyttävänä" tai "kutistavana" kuvauksena: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Ominaisarvot ja -vektorit

Ominaisarvojen määrittäminen

Vaatus: Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ oltava ratkaisu $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Ominaisarvoyhtälö

Ratkaisu $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ on olemassa tarkalleen silloin kun

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Huomautus

Jos A on $n \times n$ -matriisi, on $\det(A - \lambda I)$ astetta n oleva λ :n polynomi.

Ominaisvektorien määrittäminen

Jos ominaisarvo λ on tunnettu, voidaan siihen kuuluvat ominaisvektorit $\mathbf{x}$ määrittää yhtälöstä

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Gaussin-Jordanin menetelmällä.

Esimerkkejä

Esimerkit 62–63 (Vuoden 2019 moniste D)

Lause

Olkoon V $n \times n$ -matriisin A ominaisarvoon λ liittyvien ominaisvektoreiden joukko. Tällöin V on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

Yhteenveto

Koska ominaisarvoyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on astetta n oleva polynomiyhtälö, voi erisuuria ominaisarvoja olla korkeintaan n kappaletta.

Kutakin ominaisarvoa λ kohti ominaisvektorit määräytyvät yhtälöstä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, joka voidaan kirjoittaa homogeenisena $n \times n$ -yhtälöryhmänä. Ominaisvektorit saadaan Gaussin-Jordanin menetelmällä ja ne muodostavat $\mathbb{R}^n$:n (tai $\mathbb{C}^n$:n) aliavaruuden.

Ominaisarvot

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaalimatriisin ominaisarvot ovat siis diagonaalialkiot ja ominaisvektoreina toimivat luonnollisen kannan vektorit.

Vasemmalta kertominen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}d_1 & a_{n2}d_2 & \cdots & a_{nn}d_n \end{pmatrix}.$$

Vasemmanpuoleisen matriisin sarake i tulee siis kerrotuksi oikeanpuoleisen matriisin diagonaalialkiolla d_i . Jos myös vasemmanpuoleinen matriisi on diagonaalinen, saadaan matriisitulo kertomalla diagonaalialkiot keskenään.

Määritelmä

$n \times n$ -matriisit A ja B ovat similaareja, jos on olemassa säännöllinen matriisi P , jolle $A = P^{-1}BP$. Sanotaan, että P on similaarisuuden välittävä matriisi.

Huomautus

Matriisien similaarisuus (merk. $A \sim B$) on ekvivalenssirelaatio:

- $A \sim A$, koska $A = I^{-1}AI$
- Jos $A \sim B$, on $A = P^{-1}BP \Rightarrow B = PAP^{-1}$, joten $B \sim A$.
- Jos $A \sim B$ ja $B \sim C$, on $A = P_1^{-1}BP_1$, $B = P_2^{-1}CP_2$, joten $A = (P_2P_1)^{-1}C(P_2P_1)$, siis $A \sim C$.

Huomautus

Similaarisilla matriiseilla on sama determinantti: $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(A) \det(P^{-1}) \det(P) = \det(A) \det(P^{-1}P) = \det(A) \det(I) = \det(A)$.

Jos $A = P^{-1}BP$, on $A - \lambda I = P^{-1}(B - \lambda I)P$, joten $A - \lambda I$ ja $B - \lambda I$ ovat similaariset. Näin ollen näillä on sama determinantti ja siis sama ominaisarvoyhtälö. Similaarisilla matriiseilla on siis samat ominaisarvot.

Huomautus

Jos $A \sim B$, siis $A = P^{-1}BP$ jollekin säännölliselle matriisille P on

$$A^i = A \cdot A \cdot \dots \cdot A = P^{-1}BP \cdot P^{-1}BP \cdot \dots \cdot P^{-1}BP = P^{-1}B^iP.$$

Huomautus

Oletetaan, että $n \times n$ -matriisilla A on n ominaisarvoa $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ja näihin liittyvät ominais(pysty)vektorit $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Merkitään $P = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$, jolloin

$$AP = (A\mathbf{x}_1 \dots A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1 \dots \lambda_n\mathbf{x}_n).$$

Huomautus

$$AP = (A\mathbf{x}_1 \dots A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1 \dots \lambda_n\mathbf{x}_n),$$

ja

$$(\lambda_1\mathbf{x}_1 \dots \lambda_n\mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}}_D = PD,$$

siis $AP = PD$. Täten $P^{-1}AP = D$, jos P :llä on käänteismatriisi.

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

P^{-1} on olemassa

$$\Leftrightarrow \det(P) \neq 0$$

$\Leftrightarrow P$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat

$\Leftrightarrow$ Matriisin A ominaisvektorit muodostavat $\mathbb{C}^n$:n kannan

Esimerkki 66

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. Ominaisarvoon 1 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle (1, 1, 1) \rangle$ ja ominaisarvoon 2 kuuluvat avaruuden $\langle (3, 5, 0), (1, 0, 5) \rangle$. Matriisi

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ on kääntävä ja

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Esimerkki 67

Matriisin

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoyhtälö on $(\lambda - 2)^3 = 0$. Ominaisarvoon 2 kuuluvat ominaisvektorit muodostavat avaruuden $\langle(1, 1, 1)\rangle$. Näin ollen ei ole mahdollista muodostaa kääntyvää matriisiä P jonka sarakkeet olisivat A :n ominaisvektoreita.

Sanotaan, että matriisi A ei ole *diagonalisoituva*