

Insinöörimatematiikka 3

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Yhteenveto

Koska ominaisarvoyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on astetta n oleva polynomiyhtälö, voi erisuuria ominaisarvoja olla korkeintaan n kappaletta.

Yhteenveto

Koska ominaisarvoyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on astetta n oleva polynomiyhtälö, voi erisuuria ominaisarvoja olla korkeintaan n kappaletta.

Kutakin ominaisarvoa λ kohti ominaisvektorit määräytyvät yhtälöstä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, joka voidaan kirjoittaa homogeenisena $n \times n$ -yhtälöryhmänä.

Yhteenveto

Koska ominaisarvoyhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ on astetta n oleva polynomiyhtälö, voi erisuuria ominaisarvoja olla korkeintaan n kappaletta.

Kutakin ominaisarvoa λ kohti ominaisvektorit määräytyvät yhtälöstä $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, joka voidaan kirjoittaa homogeenisena $n \times n$ -yhtälöryhmänä. Ominaisvektorit saadaan Gaussin-Jordanin menetelmällä ja ne muodostavat $\mathbb{R}^n$:n (tai $\mathbb{C}^n$:n) aliavaruuden.

Similaarisuus

Matriisit A ja B ovat *similaarit*, jos on olemassa sellainen kääntyvä (säännöllinen) matriisi P , että $A = P^{-1}BP$.

Similaarisuus

Matriisit A ja B ovat *similaarit*, jos on olemassa sellainen kääntyvä (säännöllinen) matriisi P , että $A = P^{-1}BP$. Matriisi A on *diagonalisoituva*, jos se on similaari jonkin diagonaalimatriisin kanssa.

Huomautus

Jos $\mathbf{x}_i$ on matriisin A ominaisarvoon λ_i liittyvä ominaisvektori, on

$$AP = (A\mathbf{x}_1 \dots A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1 \dots \lambda_n\mathbf{x}_n),$$

ja

$$(\lambda_1\mathbf{x}_1 \dots \lambda_n\mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}}_D = PD,$$

Huomautus

Jos $\mathbf{x}_i$ on matriisin A ominaisarvoon λ_i liittyvä ominaisvektori, on

$$AP = (A\mathbf{x}_1 \dots A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1 \dots \lambda_n\mathbf{x}_n),$$

ja

$$(\lambda_1\mathbf{x}_1 \dots \lambda_n\mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}}_D = PD,$$

siis $AP = PD$.

Huomautus

Jos $\mathbf{x}_i$ on matriisin A ominaisarvoon λ_i liittyvä ominaisvektori, on

$$AP = (A\mathbf{x}_1 \dots A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1 \dots \lambda_n\mathbf{x}_n),$$

ja

$$(\lambda_1\mathbf{x}_1 \dots \lambda_n\mathbf{x}_n) = (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}}_D = PD,$$

siis $AP = PD$. Täten $P^{-1}AP = D$, jos P :llä on käänteismatriisi.

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

P^{-1} on olemassa

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

P^{-1} on olemassa

$$\Leftrightarrow \det(P) \neq 0$$

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

P^{-1} on olemassa

$$\Leftrightarrow \det(P) \neq 0$$

$\Leftrightarrow P$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat

Lause

Olkoon $AP = PD$ kuten edellä.

P^{-1} on olemassa

$$\Leftrightarrow \det(P) \neq 0$$

$\Leftrightarrow P$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat

$\Leftrightarrow$ Matriisin A ominaisvektorit muodostavat $\mathbb{C}^n$:n kannan

Määritelmä

Ominaisarvoon λ liittyvä *Jordan*-lohko on

$$J_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Diagonaalimatriisin potenssit:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^n \end{pmatrix},$$

Diagonaalimatriisin potenssit:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k^n \end{pmatrix},$$

Jordan-lohkojen potenssit:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

ja niin edelleen.

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

ja niin edelleen.

Huomaus

$$\begin{aligned} n\lambda^{n-1} &= \frac{d}{d\lambda} \lambda^n, \quad \binom{n}{2}\lambda^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda^2} \lambda^n, \\ \binom{n}{3}\lambda^{n-3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \lambda^{n-3} = \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\lambda^3} \lambda^n \end{aligned}$$

Lause

Olkoon A $n \times n$ -matriisi, jonka ominaisarvot ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (eivät välttämättä erisuuret). Tällöin on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P , että $P^{-1}AP$ voidaan esittää lohkomuodossa

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}.$$

Matriisi P voidaan valita siten, että sen sarakkeet ovat matriisin A ominaisvektoreita tai *yleistettyjä* ominaisvektoreita.

Huomautus

- Ominaisarvoon λ kuuluvat $n \times n$ -matriisin A ominaisvektorit $\mathbf{x}$ toteuttavat yhtälön $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Huomautus

- Ominaisarvoon λ kuuluvat $n \times n$ -matriisin A ominaisvektorit $\mathbf{x}$ toteuttavat yhtälön $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Jos on olemassa n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, matriisi A on diagonalisoituva.

Huomautus

- Ominaisarvoon λ kuuluvat $n \times n$ -matriisin A ominaisvektorit $\mathbf{x}$ toteuttavat yhtälön $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Jos on olemassa n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, matriisi A on diagonalisoituva.
- Aina näin ei ole, mutta tällöin on mahdollista löytää *toisen kertaluvun* ominaisvektoreita $\mathbf{y}$ jotka toteuttavat yhtälön $(A - \lambda I)^2\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Huomautus

- Ominaisarvoon λ kuuluvat $n \times n$ -matriisin A ominaisvektorit $\mathbf{x}$ toteuttavat yhtälön $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Jos on olemassa n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, matriisi A on diagonalisoituva.
- Aina näin ei ole, mutta tällöin on mahdollista löytää *toisen kertaluvun* ominaisvektoreita $\mathbf{y}$ jotka toteuttavat yhtälön $(A - \lambda I)^2\mathbf{y} = \mathbf{0}$.
- Jos merkitään $(A - \lambda I)\mathbf{y} = \mathbf{x}$, on siis $(A - \lambda I)\mathbf{x} = (A - \lambda I)^2\mathbf{y} = \mathbf{0}$, joten $\mathbf{x}$ on tavallinen (ensimmäisen kertaluvun ominaisvektori).

Määritelmä

Vektori $\mathbf{x}_k$ on $n \times n$ -matriisin ominaisarvoon λ kuuluva *kertaluvun* k ominaisvektori, jos $(A - \lambda I)^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Vektori $\mathbf{x}_k$ on $n \times n$ -matriisin ominaisarvoon λ kuuluva *kertaluvun* k ominaisvektori, jos $(A - \lambda I)^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

Huomautus

Merkitään $\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)\mathbf{x}_k$, jolloin
 $(A - \lambda I)^{k-1} \mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Vektori $\mathbf{x}_k$ on $n \times n$ -matriisin ominaisarvoon λ kuuluva *kertaluvun* k ominaisvektori, jos $(A - \lambda I)^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

Huomautus

Merkitään $\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)\mathbf{x}_k$, jolloin $(A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Näin ollen $\mathbf{x}_{k-1}$ on kertaluvun $k - 1$ ominaisvektori.

Määritelmä

Vektori $\mathbf{x}_k$ on $n \times n$ -matriisin ominaisarvoon λ kuuluva *kertaluvun* k ominaisvektori, jos $(A - \lambda I)^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

Huomautus

Merkitään $\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)\mathbf{x}_k$, jolloin $(A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Näin ollen $\mathbf{x}_{k-1}$ on kertaluvun $k - 1$ ominaisvektori.

Seuraus

Jos E_λ^k on kertalukua k olevien ominaisvektoreiden joukko, on E_λ^k aliavaruus ja $E_\lambda^1 \subseteq E_\lambda^2 \subseteq E_\lambda^3 \subseteq \dots$

Määritelmä

Vektori $\mathbf{x}_k$ on $n \times n$ -matriisin ominaisarvoon λ kuuluva *kertaluvun* k ominaisvektori, jos $(A - \lambda I)^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

Huomautus

Merkitään $\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)\mathbf{x}_k$, jolloin $(A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Näin ollen $\mathbf{x}_{k-1}$ on kertaluvun $k - 1$ ominaisvektori.

Seuraus

Jos E_λ^k on kertalukua k olevien ominaisvektoreiden joukko, on E_λ^k aliavaruus ja $E_\lambda^1 \subseteq E_\lambda^2 \subseteq E_\lambda^3 \subseteq \dots$

Lause

Äärellisulotteisessa avaruudessa $\mathbb{C}^n$ jono $E_\lambda^1 \subseteq E_\lambda^2 \subseteq E_\lambda^3 \subseteq \dots$ päättyy.

Esimerkki

Olkoon A 2×2 -matriisi jolla on vain yksi ominaisarvo λ ja johon kuuluvat ominaisvektorit muodostavat vain 1-ulotteisen aliavaruuden.

Esimerkki

Olkoon A 2×2 -matriisi jolla on vain yksi ominaisarvo λ ja johon kuuluvat ominaisvektorit muodostavat vain 1-ulotteisen aliavaruuden. Valitaan tämän generoivaksi alkioksi $\mathbf{x}$, jolloin siis $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Esimerkki

Olkoon A 2×2 -matriisi jolla on vain yksi ominaisarvo λ ja johon kuuluvat ominaisvektorit muodostavat vain 1-ulotteisen aliavaruuden. Valitaan tämän generoivaksi alkioksi $\mathbf{x}$, jolloin siis $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Edellämainitun perusteella on olemassa toisen kertaluvun ominaisvektori $\mathbf{y}$ joka toteuttaa yhtälön $(A - \lambda I)\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ja joukko $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ generoi kaksiulotteisen avaruuden.

Esimerkki

Olkoon A 2×2 -matriisi jolla on vain yksi ominaisarvo λ ja johon kuuluvat ominaisvektorit muodostavat vain 1-ulotteisen aliavaruuden. Valitaan tämän generoivaksi alkioksi $\mathbf{x}$, jolloin siis $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Edellämainitun perusteella on olemassa toisen kertaluvun ominaisvektori $\mathbf{y}$ joka toteuttaa yhtälön $(A - \lambda I)\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ja joukko $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ generoi kaksiulotteisen avaruuden. Erityisesti tämä joukko on lineaarisesti riippumaton.

Esimerkki

Olkoon A 2×2 -matriisi jolla on vain yksi ominaisarvo λ ja johon kuuluvat ominaisvektorit muodostavat vain 1-ulotteisen aliavaruuden. Valitaan tämän generoivaksi alkioksi $\mathbf{x}$, jolloin siis $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Edellämainitun perusteella on olemassa toisen kertaluvun ominaisvektori $\mathbf{y}$ joka toteuttaa yhtälön $(A - \lambda I)\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ja joukko $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ generoi kaksiulotteisen avaruuden. Erityisesti tämä joukko on lineaarisesti riippumaton.

Ylläolevien yhtälöiden perusteella $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ja $A\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.

Esimerkki

Olkoon A 2×2 -matriisi jolla on vain yksi ominaisarvo λ ja johon kuuluvat ominaisvektorit muodostavat vain 1-ulotteisen aliavaruuden. Valitaan tämän generoivaksi alkioksi $\mathbf{x}$, jolloin siis $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Edellämainitun perusteella on olemassa toisen kertaluvun ominaisvektori $\mathbf{y}$ joka toteuttaa yhtälön $(A - \lambda I)\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ja joukko $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ generoi kaksiulotteisen avaruuden. Erityisesti tämä joukko on lineaarisesti riippumaton.

Ylläolevien yhtälöiden perusteella $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ja $A\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.

Jos nyt määritellään $P = (\mathbf{x} \ \mathbf{y})$, on $AP = (A\mathbf{x} \ A\mathbf{y})$ mutta toisaalta matriisille $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ on $PJ = (\lambda\mathbf{x} \ \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y})$,

Esimerkki

Olkoon A 2×2 -matriisi jolla on vain yksi ominaisarvo λ ja johon kuuluvat ominaisvektorit muodostavat vain 1-ulotteisen aliavaruuden. Valitaan tämän generoivaksi alkioksi $\mathbf{x}$, jolloin siis $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Edellämainitun perusteella on olemassa toisen kertaluvun ominaisvektori $\mathbf{y}$ joka toteuttaa yhtälön $(A - \lambda I)\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ja joukko $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ generoi kaksiulotteisen avaruuden. Erityisesti tämä joukko on lineaarisesti riippumaton.

Ylläolevien yhtälöiden perusteella $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ja $A\mathbf{y} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.

Jos nyt määritellään $P = (\mathbf{x} \ \mathbf{y})$, on $AP = (A\mathbf{x} \ A\mathbf{y})$ mutta toisaalta matriisille $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ on $PJ = (\lambda\mathbf{x} \ \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y})$, siis

$$AP = PJ \Leftrightarrow P^{-1}AP = J.$$

Määritelmä

Jono yleistettyjä ominaisvektoreita $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ on *Jordanin* ketju, jos $\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)\mathbf{x}_k$.

Määritelmä

Jono yleistettyjä ominaisvektoreita $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ on *Jordanin ketju*, jos $\mathbf{x}_{k-1} = (A - \lambda I)\mathbf{x}_k$.

Huomautus

Astetta k olevat yleistetyt ominaisvektorit voidaan määrittää ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Määritelmä

Matriisin A ominaisarvon λ *algebraallinen kertaluku* on λ :n kertaluku ominaisarvopolynomin $p(x) = \det(A - xI)$ nollakohtana.

Määritelmä

Matriisin A ominaisarvon λ *algebraallinen kertaluku* on λ :n kertaluku ominaisarvopolynomin $p(x) = \det(A - xI)$ nollakohtana.

Huomautus

Haluttaessa muodostaa Jordanin ketju, yleistettyjen ominaisvektoreiden etsiminen kannattaa usein aloittaa korkeimmasta kertaluvusta alkaen.

Yleistettyjen ominaisvektoreiden etsiminen

Olkoon m λ :n algebrallinen kertaluku.

- Selvitä arvoilla $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ luvut $d_i = \dim(E_\lambda^i)$ kunnes löytyy avaruus E_λ^k jonka dimensio $d_k = m$.
- Arvosta $i = k$ arvoon $i = 1$ tee:
- Valitse avaruuden E_λ^i kannasta $\dim(E_\lambda^i) - \dim(E_\lambda^{i-1})$ vektoria, jotka eivät kuulu avaruuteen E_λ^{i-1} .
- Jatka seuraavaksi pienempään i :n arvoon ja valitse aina mukaan vektori $(A - \lambda I)\mathbf{x}$, jos $\mathbf{x}$ oli valittu aiemmassa vaiheessa (Jordanin ketju).

Avaruus E_1^1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -17 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0$$

Avaruus E_1^1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -17 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Avaruus E_1^1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -17 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Avaruus E_1^1 :

$$(A - 1 \cdot I)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 10 & -17 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avaruus E_1^1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -17 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Avaruus E_1^1 :

$$(A - 1 \cdot I)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 10 & -17 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y, y, 0) = y(2, 1, 0)$$

Avaruudet E_1^2 ja E_1^3

Avaruus E_1^2 :

$$(A - 1 \cdot I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avaruudet E_1^2 ja E_1^3

Avaruus E_1^2 :

$$(A - 1 \cdot I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Avaruudet E_1^2 ja E_1^3

Avaruus E_1^2 :

$$(A - 1 \cdot I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Avaruus E_1^3 : $(A - 1 \cdot I)^3 \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Avaruudet E_1^2 ja E_1^3

Avaruus E_1^2 :

$$(A - 1 \cdot I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$$

Avaruus E_1^3 : $(A - 1 \cdot I)^3 \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Nyt $(A - 1 \cdot I)^3 = 0$, joten $E_1^3 = \mathbb{C}^3$

Ominaisvektoreiden valinta

$E^1 = \langle (2, 1, 0) \rangle$, $E^2 = \langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$, $E^3 = \mathbb{C}^3$, dimensiot 1, 2 ja 3.

Ominaisvektoreiden valinta

$E^1 = \langle (2, 1, 0) \rangle$, $E^2 = \langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$, $E^3 = \mathbb{C}^3$, dimensiot 1, 2 ja 3.

- Ensin valitaan $3 - 2 = 1$ vektoria avaruudesta $E^3 \setminus E^2$, esim. $(1, 0, 0)^T$

Ominaisvektoreiden valinta

$E^1 = \langle (2, 1, 0) \rangle$, $E^2 = \langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$, $E^3 = \mathbb{C}^3$, dimensiot 1, 2 ja 3.

- Ensin valitaan $3 - 2 = 1$ vektoria avaruudesta $E^3 \setminus E^2$, esim. $(1, 0, 0)^T$
- Sitten valitaan $2 - 1 = 1$ vektoria avaruudesta $E^2 \setminus E^1$, joukkoon pitää valita $(A - I)(1, 0, 0)^T = (-5, -1, 1)^T$.

Ominaisvektoreiden valinta

$E^1 = \langle (2, 1, 0) \rangle$, $E^2 = \langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle$, $E^3 = \mathbb{C}^3$, dimensiot 1, 2 ja 3.

- Ensin valitaan $3 - 2 = 1$ vektoria avaruudesta $E^3 \setminus E^2$, esim. $(1, 0, 0)^T$
- Sitten valitaan $2 - 1 = 1$ vektoria avaruudesta $E^2 \setminus E^1$, joukkoon pitää valita $(A - I)(1, 0, 0)^T = (-5, -1, 1)^T$.
- Sitten valitaan 1 vektori avaruudesta E^1 , joukkoon pitää valita $(A - I)(-5, -1, 1)^T = (-2, -1, 0)^T$.

Matriisin P muodostaminen

- P :n sarakkeiksi valitaan ominaisvektorit aloittaen alimmasta kertaluvusta
- Sarake $\mathbf{x}_k$ sijoitetaan välittömästi sarakkeen $\mathbf{x}_{k+1}$ vasemmalle puolelle, jos $(A - \lambda I)\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$

Matriisin P muodostaminen

- P :n sarakkeiksi valitaan ominaisvektorit aloittaen alimmasta kertaluvusta
- Sarake $\mathbf{x}_k$ sijoitetaan välittömästi sarakkeen $\mathbf{x}_{k+1}$ vasemmalle puolelle, jos $(A - \lambda I)\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jolloin

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Määritelmä

Mitä tarkoittaa e^{tA} ?

Määritelmä

Mitä tarkoittaa e^{tA} ?

Vastaus:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \frac{1}{4!}(tA)^4 + \dots,$$

Määritelmä

Mitä tarkoittaa e^{tA} ?

Vastaus:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \frac{1}{4!}(tA)^4 + \dots,$$

josta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tA} &= 0 + A + tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \frac{1}{3!}t^3A^4 + \dots \\ &= A(I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots) = Ae^{tA}.\end{aligned}$$

Eksponenttimatriisin laskeminen

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

Eksponenttimatriisin laskeminen

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

Jos

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

on diagonaalinen,

EkspONENTTIMATRIISIIN laskeminen

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots$$

Jos

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

on diagonaalinen, on

$$A^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Eksponenttimatriisin laskeminen

ja siksi

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Matriisien eksponenttifunktio

Eksponenttimatriisin laskeminen

ja siksi

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_n^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matriisien eksponenttifunktio

Eksponenttimatriisin laskeminen

ja siksi

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalisoituvat matriisit

Matriisi A on diagonalisoituva, jos on olemassa sellainen P , että $P^{-1}AP = D$ on diagonaalinen.

Diagonalisoituvat matriisit

Matriisi A on diagonalisoituva, jos on olemassa sellainen P , että $P^{-1}AP = D$ on diagonaalinen. Diagonalisoituvalle matriisille A on $A^n = PD^nP^{-1}$ ja tästä seuraa, että

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}(A)^2 + \frac{1}{3!}(A)^3 + \dots$$

Diagonalisoituvat matriisit

Matriisi A on diagonalisoituva, jos on olemassa sellainen P , että $P^{-1}AP = D$ on diagonaalinen. Diagonalisoituvalle matriisille A on $A^n = PD^nP^{-1}$ ja tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{1}{2!}(A)^2 + \frac{1}{3!}(A)^3 + \dots \\ &= P\left(I + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \dots\right)P^{-1} \end{aligned}$$

Diagonalisoituvat matriisit

Matriisi A on diagonalisoituva, jos on olemassa sellainen P , että $P^{-1}AP = D$ on diagonaalinen. Diagonalisoituvalle matriisille A on $A^n = PD^nP^{-1}$ ja tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}e^A &= I + A + \frac{1}{2!}(A)^2 + \frac{1}{3!}(A)^3 + \dots \\&= P\left(I + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \dots\right)P^{-1} \\&= Pe^DP^{-1}.\end{aligned}$$

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

Matriisien eksponenttifunktio

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

ja niin edelleen.

Matriisien eksponenttifunktio

Jordan-lohkojen potenssit

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

ja niin edelleen.

Huomaus

$$\begin{aligned} n\lambda^{n-1} &= \frac{d}{d\lambda} \lambda^n, \quad \binom{n}{2}\lambda^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda^2} \lambda^n, \\ \binom{n}{3}\lambda^{n-3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \lambda^{n-3} = \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\lambda^3} \lambda^n \end{aligned}$$

Esimerkki

Jos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

Esimerkki

Jos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

on

$$e^J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$$

Esimerkki

Jos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

on

$$\begin{aligned} e^J &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esimerkki

Jos

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

on

$$\begin{aligned} e^J &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda & \frac{1}{2}e^\lambda \\ 0 & e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & 0 & e^\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vektoriavaruuksien geometriaa

Lähtökohta

Avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ (Euklidinen) normi, etäisyys origosta määritellään

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Lähtökohta

Avaruuksissa $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ (Euklidinen) normi, etäisyys origosta määritellään

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Määritelmä: Etäisyys

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Kosinilause

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta$$

Kosinilause

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta$$

Pistetulo: Geometrinen määritelmä

Vertaa: Kun $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y.$$

Kosinilause

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - 2||\mathbf{x}||||\mathbf{y}|| \cos \theta$$

Pistetulo: Geometrinen määritelmä

Vertaa: Kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Määritellään

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = ||\mathbf{x}||||\mathbf{y}|| \cos \theta,$$

Kosinilause

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - 2||\mathbf{x}||||\mathbf{y}|| \cos \theta$$

Pistetulo: Geometrinen määritelmä

Vertaa: Kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Määritellään

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = ||\mathbf{x}||||\mathbf{y}|| \cos \theta,$$

jolloin

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \cos 0 = \|\mathbf{x}\|^2$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \cos 0 = \|\mathbf{x}\|^2$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \cos 0 = \|\mathbf{x}\|^2$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y})$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \cos 0 = \|\mathbf{x}\|^2$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y})$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \cos 0 = \|\mathbf{x}\|^2$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y})$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

Seuraus

Koska $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ ja $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$,

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \cos 0 = \|\mathbf{x}\|^2$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y})$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

Seuraus

Koska $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ ja $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, on vektoreille $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}$ ja $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}) \cdot (y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j})$$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \cos 0 = \|\mathbf{x}\|^2$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y})$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

Seuraus

Koska $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ ja $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, on vektoreille $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}$ ja $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j}) \cdot (y_1 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}) \\ &= x_1 \mathbf{i} \cdot y_1 \mathbf{i} + x_1 \mathbf{i} \cdot y_2 \mathbf{j} + x_2 \mathbf{j} \cdot y_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} \cdot y_2 \mathbf{j}\end{aligned}$$

Pistetulo: Ominaisuuksia

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cdot \cos 0 = \|\mathbf{x}\|^2$
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $(\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y})$
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

Seuraus

Koska $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ ja $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, on vektoreille $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ ja $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}) \cdot (y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) \\ &= x_1\mathbf{i} \cdot y_1\mathbf{i} + x_1\mathbf{i} \cdot y_2\mathbf{j} + x_2\mathbf{j} \cdot y_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} \cdot y_2\mathbf{j} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2\end{aligned}$$

Huomautus

Jos $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat rivivektoreita, on matriisitulo

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^T = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Huomautus

Jos $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat rivivektoreita, on matriisitulo

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^T = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Jos $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ (riviesitys) ja $B = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n)$ (sarake-esitys)
ovat $n \times n$ -matriiseja, on

Huomautus

Jos $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat rivivektoreita, on matriisitulo

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^T = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Jos $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ (riviesitys) ja $B = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n)$ (sarake-esitys)
ovat $n \times n$ -matriiseja, on

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$$

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (lineaarisuus).

Vektoriavaruuksien geometriaa

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (lineaarisuus).

Esimerkki

Vektoreiden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* määritellään $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (lineaarisuus).

Esimerkki

Vektoreiden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* määritellään $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Tämä toteuttaa sisätulon ehdot.

Yleistys ja abstrahointi

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, on *sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegatiivisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (vaihdannaisuus eli kommutatiivisuus).
- $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (lineaarisuus).

Esimerkki

Vektoreiden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* määritellään $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Tämä toteuttaa sisätulon ehdot. Niin myös välillä $[a, b]$ jatkuvien reaalifunktioiden joukossa $C^0[a, b]$ määritely

$$(f, g) = \int_a^b fg.$$

Huomautus

Sisätuloja on useita: Jos $p_1, \dots, p_n > 0$, on

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_1 x_1 y_1 + \dots + p_n x_n y_n$$

on sisätulo.

Huomautus

Sisätuloja on useita: Jos $p_1, \dots, p_n > 0$, on

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_1 x_1 y_1 + \dots + p_n x_n y_n$$

on sisätulo.

Määritelmä

$n \times n$ matriisi A on *positiividefiniitti* jos $\mathbf{x} A \mathbf{x}^T > 0$ kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Huomautus

Sisätuloja on useita: Jos $p_1, \dots, p_n > 0$, on

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_1 x_1 y_1 + \dots + p_n x_n y_n$$

on sisätulo.

Määritelmä

$n \times n$ matriisi A on *positiividefiniitti* jos $\mathbf{x} A \mathbf{x}^T > 0$ kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Jos matriisi A on symmetrinen ($A = A^T$) ja positiividefiniitti, on

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} A \mathbf{y}^T$$

sisätulo.

Huomautus

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarikuvaus. Koska lineaarikuvauksella on myös aina matriisiesitys, voidaan todeta että

$$f(\mathbf{x}) = A_f \mathbf{x}$$

jollekin matriisille $1 \times n$ -matriisille A_f (rivivektorille), kun $\mathbf{x}$ esitetään $n \times 1$ -matriisina (sarakevektorina).

Huomautus

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarikuvaus. Koska lineaarikuvauksella on myös aina matriisiesitys, voidaan todeta että

$$f(\mathbf{x}) = A_f \mathbf{x}$$

jollekin matriisille $1 \times n$ -matriisille A_f (rivivektorille), kun $\mathbf{x}$ esitetään $n \times 1$ -matriisina (sarakevektorina).

Merkitään $A_f = \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ja $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, jolloin

$$f(\mathbf{x}) = A_f \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^T.$$

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Jokainen sisätulo toteuttaa epäyhtälön

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Jokainen sisätulo toteuttaa epäyhtälön

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

Esimerkki

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n|^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö

Jokainen sisätulo toteuttaa epäyhtälön

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

Esimerkki

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n|^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

Esimerkki

$$\left| \int_a^b fg \right|^2 \leq \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2$$

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Vektoriavaruuden *normi* on kuvaus $V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Vektoriavaruuden *normi* on kuvaus $V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ja $\|\mathbf{x}\| = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (positiivisuus ja epädegeneratiivisuus)

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Vektoriavaruuden *normi* on kuvaus $V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ja $\|\mathbf{x}\| = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (positiivisuus ja epädegeneratiivisuus)
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ (skalaarin siirto)

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Vektoriavaruuden *normi* on kuvaus $V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ja $\|\mathbf{x}\| = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (positiivisuus ja epädegeneratiivisuus)
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ (skalaarin siirto)
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (kolmioepäyhtälö)

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. Vektoriavaruuden *normi* on kuvaus $V \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ja $\|\mathbf{x}\| = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (positiivisuus ja epädegeneratiivisuus)
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|$ (skalaarin siirto)
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (kolmioepäyhtälö)

Huomautus

Sisätulo indusoi aina normin:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

Esimerkkejä

Pistetulon indusoima kuvaus

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

on normi.

Esimerkkejä

Pistetulon indusoima kuvaus

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

on normi.

Myös

$$||\mathbf{x}|| = |x_1| + \dots + |x_n|$$

on normi.

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. *Etäisyys* on funktio $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. *Etäisyys* on funktio $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ja $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. *Etäisyys* on funktio $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ja $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (symmetria).

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. *Etäisyys* on funktio $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ja $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (symmetria).
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (kolmioepäyhtälö).

Määritelmä

Olkoon V vektoriavaruus. *Etäisyys* on funktio $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ja $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{y}$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (symmetria).
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (kolmioepäyhtälö).

Huomautus

Jokainen normi määrittelee etäisyysfunktion

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Määritelmä

Jos V on vektoriavaruus, jossa etäisyysfunktion $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ määrittelee sisätulon indusoima normi, siis

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Tällöin sanotaan että avaruus on *Euklidinen*.

Määritelmä

Jos V on vektoriavaruus, jossa etäisyysfunktion $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ määrittelee sisätulon indusoima normi, siis

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Tällöin sanotaan että avaruus on *Euklidinen*.

Huomautus

Ylläolevan määritelmän mukaan Euklidisuus ei ole vektoriavaruuden algebrallinen vaan geometrinen ominaisuus. Vektoriavaruudelle on mahdollista määritellä sekä Euklidisia että epäeuklidisia geometrioita.

Vektoriavaruuksien geometriaa

Määritelmä

Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, on *Hermiten sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

Määritelmä

Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, on *Hermiten sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegativisuus ja epädegeneratiivisuus).

Määritelmä

Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, on *Hermiten sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegativisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ (vinosymmetria).

Määritelmä

Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, on *Hermiten sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegativisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ (vinosymmetria).
- $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (lineaarisuus 1. argumentin suhteen).

Määritelmä

Olkoon V kompleksinen vektoriavaruus. Kuvaus $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, on *Hermiten sisätulo*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

- $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ja $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ tarkalleen silloin kun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (epänegativisuus ja epädegeneratiivisuus).
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ (vinosymmetria).
- $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (lineaarisuus 1. argumentin suhteen).

Määritelmä

Vektoreiden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ *Hermiten pistetulo* määritellään $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$.

Lause

- Hermiten pistetulo täyttää Hermiten sisätulon ehdot.

Lause

- Hermiten pistetulo täyttää Hermiten sisätulon ehdot.
- Riittävän säännöllisten funktioiden joukolle

$$(f, g) = \int_a^b f \bar{g}$$

on Hermiten sisätulo.

Määritelmä: Kulma vektoriavaruudessa

Nollasta poikkeavien vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välinen kulma θ määritellään

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Määritelmä: Kulma vektoriavaruudessa

Nollasta poikkeavien vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välinen kulma θ määritellään

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Nollavektorin välinen kulma toiseen vektoriin määritellään aina suoraksi kulmaksi.

Määritelmä: Kulma vektoriavaruudessa

Nollasta poikkeavien vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välinen kulma θ määritellään

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Nollavektorin välinen kulma toiseen vektoriin määritellään aina suoraksi kulmaksi.

Huomautus

Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön perusteella

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2,$$

joten

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Esimerkki

Esimerkki 82

Määritelmä

Olkoon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jokin sisätulo. Vektorit $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat *ortogonaalit* eli *kohtisuorat* jos $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Esimerkki

Esimerkki 82

Määritelmä

Olkoon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jokin sisätulo. Vektorit $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat *ortogonaalit* eli *kohtisuorat* jos $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Määritelmä

Vektorijoukko $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ on *ortogonaali*, jos $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Ortogonaali joukko $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ on *ortonormaali*, jos lisäksi $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = 1$.

Huomautus

- Jokaisesta ortogonaalista joukosta joka ei sisällä nollavektoria voidaan helposti saada ortonormaali kertomalla kukin $\mathbf{x}_i$ norminsa käänteisluvulla $\|\mathbf{x}_i\|^{-1}$.

Huomautus

- Jokaisesta ortogonaalista joukosta joka ei sisällä nollavektoria voidaan helposti saada ortonormaali kertomalla kukin $\mathbf{x}_i$ norminsa käänteisluvulla $\|\mathbf{x}_i\|^{-1}$.
- $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ on ortonormaali kun sisätuloksi valitaan tavallinen pistetulo.

Huomautus

- Jokaisesta ortogonaalista joukosta joka ei sisällä nollavektoria voidaan helposti saada ortonormaali kertomalla kukin $\mathbf{x}_i$ norminsa käänteisluvulla $\|\mathbf{x}_i\|^{-1}$.
- $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ on ortonormaali kun sisätuloksi valitaan tavallinen pistetulo.

Lause

Olkkoon V vektoriavaruus ja $A = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ joukko, joka ei sisällä nollavektoria ja on ortogonaali jonkin sisätulon $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ suhteen. Tällöin A on lineaarisesti riippumaton.

Koordinaattivektorin etsiminen

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on jokin kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

Koordinaattivektorin etsiminen

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on jokin kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

ja vektoria $(x_1, \dots, x_n)$ kutsutaan vektorin $\mathbf{x}$ koordinaattivektoriksi kannan B_1 suhteen.

Koordinaattivektorin etsiminen

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on jokin kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

ja vektoria $(x_1, \dots, x_n)$ kutsutaan vektorin $\mathbf{x}$ koordinaattivektoriksi kannan B_1 suhteen.

Koordinaattivektori $(x_1, \dots, x_n)$ voidaan löytää Gaussin-Jordanin prosessilla (Yleensä työläs prosessi)

Koordinaattivektorin etsiminen, Ortonormaali kanta

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on ortonormaali kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

Koordinaattivektorin etsiminen, Ortonormaali kanta

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on ortonormaali kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

ja vektoria $(x_1, \dots, x_n)$ kutsutaan vektorin $\mathbf{x}$ koordinaattivektoriksi kannan B_1 suhteen.

Koordinaattivektorin etsiminen, Ortonormaali kanta

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on ortonormaali kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

ja vektoria $(x_1, \dots, x_n)$ kutsutaan vektorin $\mathbf{x}$ koordinaattivektoriksi kannan B_1 suhteen.

Koordinaattivektori $(x_1, \dots, x_n)$ voidaan löytää laskemalla sisätulo $(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i)$, jolloin

$$(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i) = x_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i) + \dots + x_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) + \dots + x_n(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_i)$$

Koordinaattivektorin etsiminen, Ortonormaali kanta

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on ortonormaali kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

ja vektoria $(x_1, \dots, x_n)$ kutsutaan vektorin $\mathbf{x}$ koordinaattivektoriksi kannan B_1 suhteen.

Koordinaattivektori $(x_1, \dots, x_n)$ voidaan löytää laskemalla sisätulo $(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i)$, jolloin

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{b}_i) &= x_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i) + \dots + x_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) + \dots + x_n(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_i) \\ &= x_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) \end{aligned}$$

Koordinaattivektorin etsiminen, Ortonormaali kanta

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on ortonormaali kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

ja vektoria $(x_1, \dots, x_n)$ kutsutaan vektorin $\mathbf{x}$ koordinaattivektoriksi kannan B_1 suhteen.

Koordinaattivektori $(x_1, \dots, x_n)$ voidaan löytää laskemalla sisätulo $(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i)$, jolloin

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{b}_i) &= x_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i) + \dots + x_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) + \dots + x_n(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_i) \\ &= x_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) = x_i \|\mathbf{b}_i\|^2, \end{aligned}$$

Koordinaattivektorin etsiminen, Ortonormaali kanta

Jos $B_1 = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on ortonormaali kanta, on jokaiselle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olemassa kantaesitys:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n,$$

ja vektoria $(x_1, \dots, x_n)$ kutsutaan vektorin $\mathbf{x}$ koordinaattivektoriksi kannan B_1 suhteen.

Koordinaattivektori $(x_1, \dots, x_n)$ voidaan löytää laskemalla sisätulo $(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i)$, jolloin

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i) &= x_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i) + \dots + x_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) + \dots + x_n(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_i) \\ &= x_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) = x_i \|\mathbf{b}_i\|^2,\end{aligned}$$

siis

$$x_i = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{b}_i)}{\|\mathbf{b}_i\|^2}$$

Määritelmä

Olkoot $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Tällöin *vektorin $\mathbf{x}$ projektio vektorilla $\mathbf{y}$* tarkoittaa sitä origon ja pisteen $\mathbf{y}$ kautta kulkevan suoran $L(\mathbf{y})$ pistettä $\mathbf{x}'$, jolle $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{y}$ vastaan.

Määritelmä

Lineaarikuvaus $f : V \rightarrow V$ säilyttää etäisyyden, jos $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aina, kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Määritelmä

Lineaarikuvaus $f : V \rightarrow V$ säilyttää etäisyyden, jos $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aina, kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Kuvaus f säilyttää normin, jos $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$.

Määritelmä

Lineaarikuvaus $f : V \rightarrow V$ säilyttää etäisyyden, jos $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aina, kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Kuvaus f säilyttää normin, jos $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. Kuvaus f säilyttää sisätulon, jos $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Määritelmä

Lineaarikuvaus $f : V \rightarrow V$ säilyttää etäisyyden, jos $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ aina, kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Kuvaus f säilyttää normin, jos $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. Kuvaus f säilyttää sisätulon, jos $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Lause

Olcoon etäisyys normin ja tämä puolestaan sisätulon indusoima. Jos lineaarikuvaus $f : V \rightarrow V$ säilyttää sisätulon, säilyttää se myös normin ja etäisyyden.

Etäisyyden säilyttävät kuvaukset

Määritelmä

Matriisi A on ortogonaali, jos $A^T = A^{-1}$, siis $A^T A = A A^T = I$.

Etäisyyden säilyttävät kuvaukset

Määritelmä

Matriisi A on ortogonaali, jos $A^T = A^{-1}$, siis $A^T A = A A^T = I$.

Lause

Jos lineaarikuvauksen $f : V \rightarrow V$ matriisi A_f on ortogonaali, niin kuvaus f säilyttää pistetulon (ja siis myös tämän indusoiman normin ja etäisyyden)

Etäisyyden säilyttävät kuvaukset

Määritelmä

Matriisi A on ortogonaali, jos $A^T = A^{-1}$, siis $A^T A = A A^T = I$.

Lause

Jos lineaarikuvauksen $f : V \rightarrow V$ matriisi A_f on ortogonaali, niin kuvaus f säilyttää pistetulon (ja siis myös tämän indusoiman normin ja etäisyyden)

Määritelmä

Matriisin A *adjugaatti* määritellään $A^* = \overline{A}^T$. Matriisi A on *unitaarinen*, jos $A^* = A^{-1}$, siis $A^* A = A A^* = I$.

Etäisyyden säilyttävät kuvaukset

Määritelmä

Matriisi A on ortogonaali, jos $A^T = A^{-1}$, siis $A^T A = A A^T = I$.

Lause

Jos lineaarikuvauksen $f : V \rightarrow V$ matriisi A_f on ortogonaali, niin kuvaus f säilyttää pistetulon (ja siis myös tämän indusoiman normin ja etäisyyden)

Määritelmä

Matriisin A *adjugaatti* määritellään $A^* = \overline{A}^T$. Matriisi A on *unitaarinen*, jos $A^* = A^{-1}$, siis $A^* A = A A^* = I$.

Lause

Jos lineaarikuvauksen $f : V \rightarrow V$ matriisi A_f on unitaarinen, niin f säilyttää Hermiten pistetulon (ja siis myös sen indusoiman normin ja etäisyyden)