

Insinöörimatematiikka 3

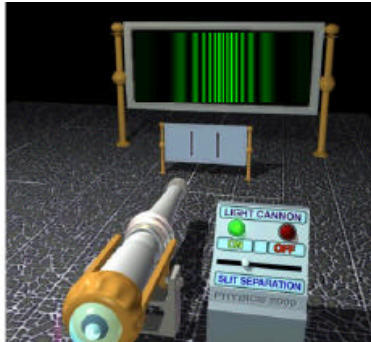
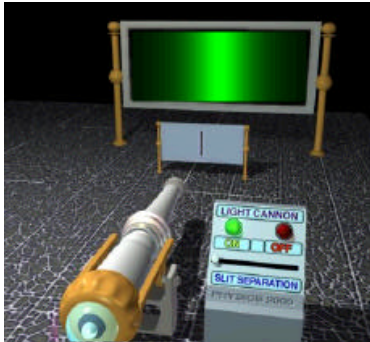
Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

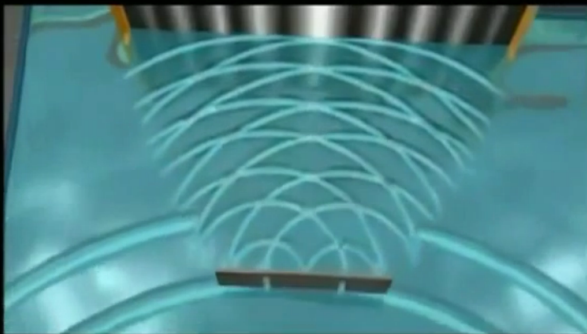
2022

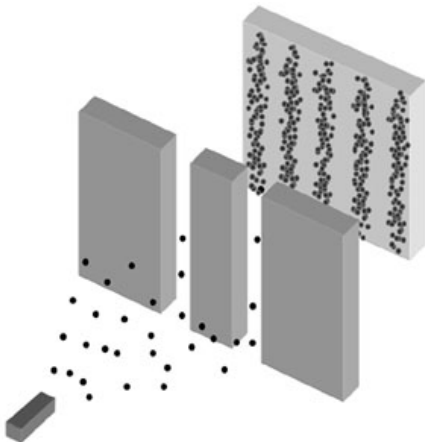
- Interferenssi
- Superpositio

Kvanttimekaniikka: Kaksoisrakokoe

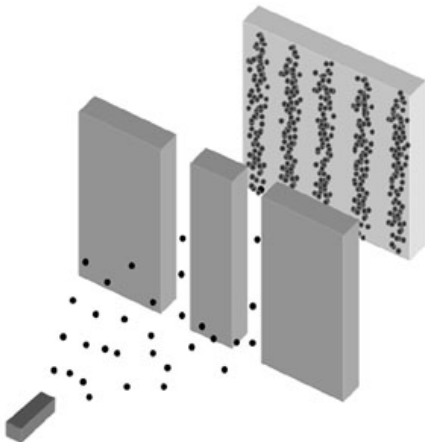


Selitys aaltoluonteen avulla.

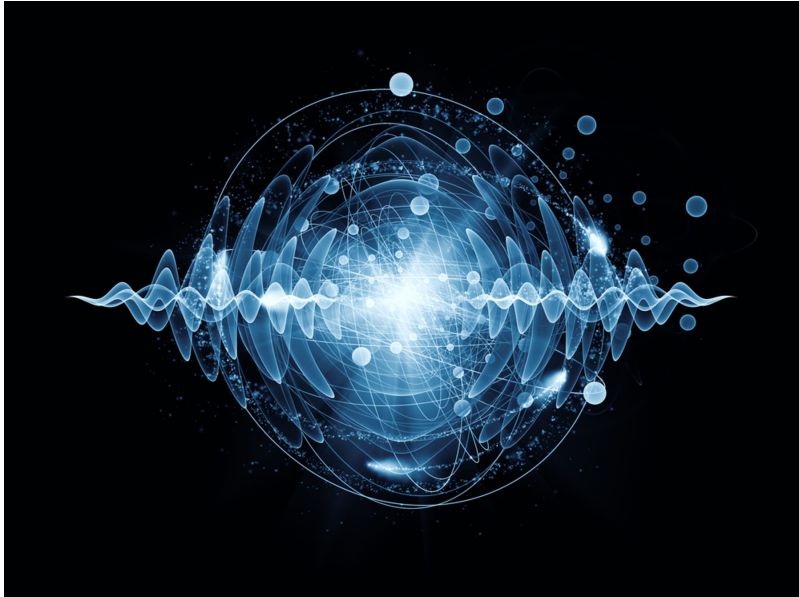




Interferenssikuvio elektroneille (Davidsson–Germer-koe 1927)

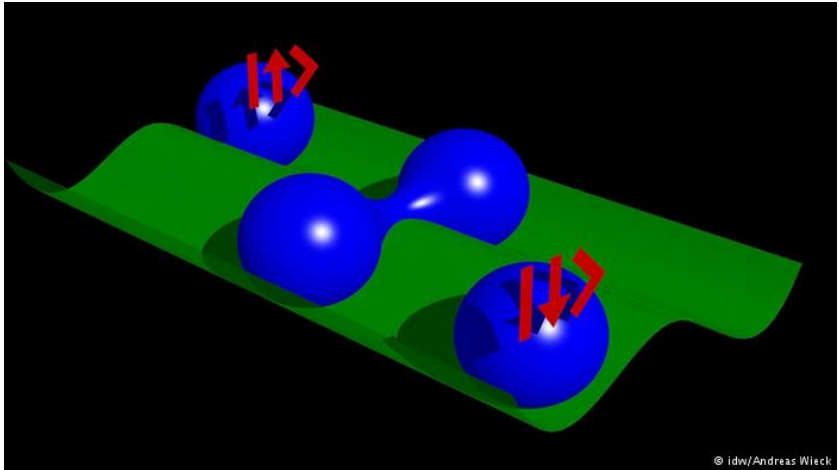


Interferenssikuvio elektroneille (Davidsson–Germer-koe 1927), for C_{60} fullereenimolekyyleille (A. Zeilingerin ryhmä 1999)

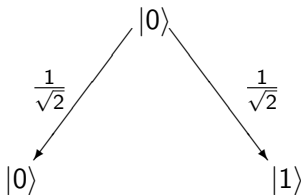




Kvanttibitit (kubitit)



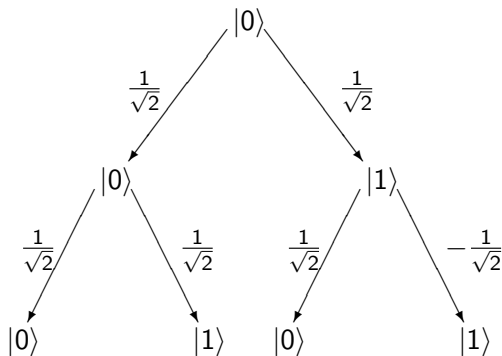
$|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$, *superpositio* tiloista $|\uparrow\rangle$ ja $|\downarrow\rangle$



$|0\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

Interference / Walsh-muunnos kahdesti

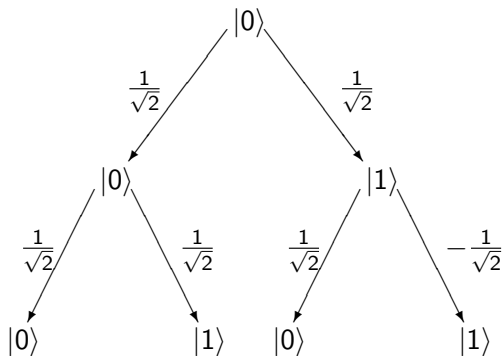


$$|0\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

$$\frac{1}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle + \frac{1}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle = |0\rangle$$

Interference / Walsh-muunnos kahdesti



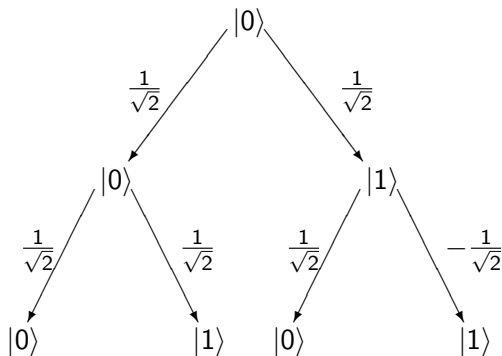
$$|0\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle \\ &+ \frac{1}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle = |0\rangle \end{aligned}$$

Konstruktiiivinen
interferenssi

Interference / Walsh-muunnos kahdesti



$$|0\rangle$$

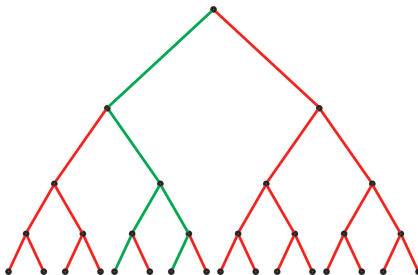
$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

$$\frac{1}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle$$

$$+ \frac{1}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle = |0\rangle$$

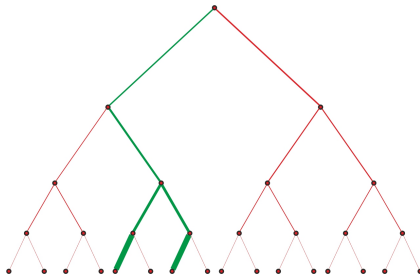
Konstruktiiivin
interferenssi

Destruktiivinen
interferessi

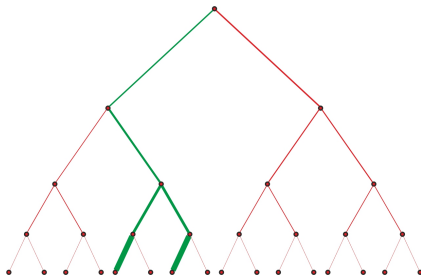


- Vain vähän ”hyviä” laskentapolkuja.

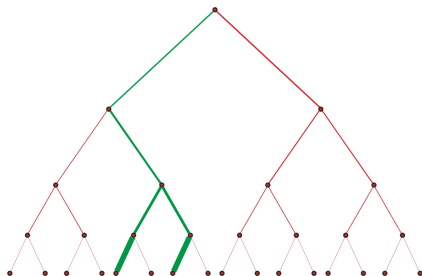
Epädeterministinen laskenta



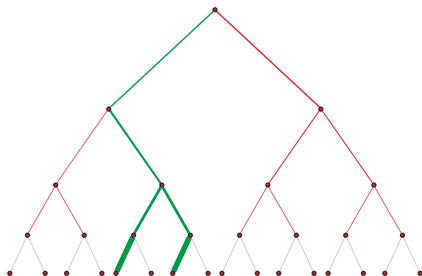
- Vain vähän ”hyviä” laskentapolkuja.
- Hyviä pitäisi vahvistaa.



- Vain vähän ”hyviä” laskentapolkuja.
- Hyviä pitäisi vahvistaa.
- Vaikuttaa mahdottomalta klassisessa (stokastisessa) laskennassa.



- Vain vähän ”hyviä” laskentapolkuja.
- Hyviä pitäisi vahvistaa.
- Vaikuttaa mahdottomalta klassisessa (stokastisessa) laskennassa.
- Mahdollista kvanttilaskennassa joissain tapauksissa.



- Vain vähän ”hyviä” laskentapolkuja.
- Hyviä pitäisi vahvistaa.
- Vaikuttaa mahdottomalta klassisessa (stokastisessa) laskennassa.
- Mahdollista kvanttilaskennassa joissain tapauksissa.
- Tämä ilmiö on kvanttilaskennan vahvuuden takana.

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Otosavaruus on mikä hyvänsä joukko S jonka alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*. *Tapaus* on mikä hyvänsä osajoukko $A \subseteq S$.

Määritelmä

Otosavaruus on mikä hyvänsä joukko S jonka alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*. *Tapaus* on mikä hyvänsä osajoukko $A \subseteq S$. Sanotaan, että A *tapahtuu*, jos kokeen tuloksena on $a \in A$.

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Otosavaruus on mikä hyvänsä joukko S jonka alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*. *Tapaus* on mikä hyvänsä osajoukko $A \subseteq S$. Sanotaan, että A *tapahtuu*, jos kokeen tuloksena on $a \in A$.

Esimerkki

Nopanheitossa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Otosavaruus on mikä hyvänsä joukko S jonka alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*. *Tapaus* on mikä hyvänsä osajoukko $A \subseteq S$. Sanotaan, että A *tapahtuu*, jos kokeen tuloksena on $a \in A$.

Esimerkki

Nopanheitossa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, parillinen silmäluku $A = \{2, 4, 6\}$.

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Otosavaruus on mikä hyvänsä joukko S jonka alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*. *Tapaus* on mikä hyvänsä osajoukko $A \subseteq S$. Sanotaan, että A *tapahtuu*, jos kokeen tuloksena on $a \in A$.

Esimerkki

Nopanheitossa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, parillinen silmäluku $A = \{2, 4, 6\}$. Tapaus A tapahtuu, jos esim. saadaan nopanheiton tuloksena 2

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Otosavaruus on mikä hyvänsä joukko S jonka alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*. *Tapaus* on mikä hyvänsä osajoukko $A \subseteq S$. Sanotaan, että A *tapahtuu*, jos kokeen tuloksena on $a \in A$.

Esimerkki

Nopanheitossa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, parillinen silmäluku $A = \{2, 4, 6\}$. Tapaus A tapahtuu, jos esim. saadaan nopanheiton tuloksena 2

Esimerkki

Kahden nopan heitossa $S = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$,

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Otosavaruus on mikä hyvänsä joukko S jonka alkioita kutsutaan *alkeistapauksiksi*. *Tapaus* on mikä hyvänsä osajoukko $A \subseteq S$. Sanotaan, että A *tapahtuu*, jos kokeen tuloksena on $a \in A$.

Esimerkki

Nopanheitossa $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, parillinen silmäluku $A = \{2, 4, 6\}$. Tapaus A tapahtuu, jos esim. saadaan nopanheiton tuloksena 2

Esimerkki

Kahden nopan heitossa $S = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$, silmälukujen summa yli 9: $A = \{(i, j) \in S \mid i + j > 9\}$

Määritelmä

Tapauksen A todennäköisyydestä käytetään merkintää $\mathbb{P}(A)$.

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapauksen A todennäköisyydestä käytetään merkintää $\mathbb{P}(A)$.

Klassinen todennäköisyys

Jos kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä, on

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|}.$$

Todennäköisyysslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapauksen A todennäköisyydestä käytetään merkintää $\mathbb{P}(A)$.

Klassinen todennäköisyys

Jos kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä, on

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|}.$$

Esimerkki

Parillinen silmäluku yhden nopan heitossa $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Todennäköisyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapauksen A todennäköisyydestä käytetään merkintää $\mathbb{P}(A)$.

Klassinen todennäköisyys

Jos kaikki alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä, on

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|}.$$

Esimerkki

Parillinen silmäluku yhden nopan heitossa $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Summa yli 9 kahden nopan heitossa: $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Empiirinen todennäköisyys

Koe toistetaan N kertaa.

Empiirinen todennäköisyys

Koe toistetaan N kertaa. Jos alkeistapaus s_i tapahtuu f_i kertaa (frekvenssi), sanotaan että alkeistapauksen s_i suhteellinen frekvenssi on $\frac{f_i}{N}$ ja empiirinen todennäköisyys määritellään suhteellisenä frekvenssinä

$$\mathbb{P}(s_i) = \frac{f_i}{N}.$$

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Esimerkki

Vuodet	Syntyneitä	Poikia	Suht. frekv.
1961	81 996	41869	0,51062
1961–62	163 450	83 582	0,51136
1961–63	245 701	125 712	0,51165
1961–64	326 129	166 921	0,51183
1961–65	404 041	206 775	0,51180
1961–66	481 711	246 326	0,51136
1961–67	559 000	285 965	0,51157
1961–68	632 654	323 566	0,51144
1961–69	700 104	358 183	0,51161
1961–70	764 663	391 197	0,51159

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Esimerkki

Vuodet	Syntyneitä	Poikia	Suht. frekv.
1961	81 996	41869	0,51062
1961–62	163 450	83 582	0,51136
1961–63	245 701	125 712	0,51165
1961–64	326 129	166 921	0,51183
1961–65	404 041	206 775	0,51180
1961–66	481 711	246 326	0,51136
1961–67	559 000	285 965	0,51157
1961–68	632 654	323 566	0,51144
1961–69	700 104	358 183	0,51161
1961–70	764 663	391 197	0,51159

Subjekttiivinen todennäköisyys

Käyn huomenna kaupassa todennäköisyydellä 0.75

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapaukset $A \subseteq S$ ja $B \subseteq S$ ovat toisensa poissulkevat, jos
 $A \cap B = \emptyset$

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapaukset $A \subseteq S$ ja $B \subseteq S$ ovat toisensa poissulkevat, jos $A \cap B = \emptyset$

Esimerkki

$A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{1, 3, 5\}$ (pariton silmäluku) ovat toisensa poissulkevat. Sen sijaan A (parillinen silmäluku) ja $B_2 = \{5, 6\}$ (silmäluku vähintään 5 eivät ole toisiaan poissulkevia).

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapaukset $A \subseteq S$ ja $B \subseteq S$ ovat toisensa poissulkevat, jos $A \cap B = \emptyset$

Esimerkki

$A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{1, 3, 5\}$ (pariton silmäluku) ovat toisensa poissulkevat. Sen sijaan A (parillinen silmäluku) ja $B_2 = \{5, 6\}$ (silmäluku vähintään 5 eivät ole toisiaan poissulkevia).

Todennäköisyyden aksioomat

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$. kaikille $A \subseteq S$

Todennäköisyysslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapaukset $A \subseteq S$ ja $B \subseteq S$ ovat toisensa poissulkevat, jos $A \cap B = \emptyset$

Esimerkki

$A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{1, 3, 5\}$ (pariton silmäluku) ovat toisensa poissulkevat. Sen sijaan A (parillinen silmäluku) ja $B_2 = \{5, 6\}$ (silmäluku vähintään 5 eivät ole toisiaan poissulkevia).

Todennäköisyyden aksioomat

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$. kaikille $A \subseteq S$
- $\mathbb{P}(S) = 1$.

Todennäköisyysslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Tapaukset $A \subseteq S$ ja $B \subseteq S$ ovat toisensa poissulkevat, jos $A \cap B = \emptyset$

Esimerkki

$A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{1, 3, 5\}$ (pariton silmäluku) ovat toisensa poissulkevat. Sen sijaan A (parillinen silmäluku) ja $B_2 = \{5, 6\}$ (silmäluku vähintään 5 eivät ole toisiaan poissulkevia).

Todennäköisyyden aksioomat

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$. kaikille $A \subseteq S$
- $\mathbb{P}(S) = 1$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ jos tapaukset A ja B ovat toisensa poissulkevat.

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, missä $\bar{A} = S \setminus A$.

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, missä $\bar{A} = S \setminus A$.
- Jos $B \subseteq A$, niin $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, missä $\bar{A} = S \setminus A$.
- Jos $B \subseteq A$, niin $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A) \leq 1$.

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, missä $\bar{A} = S \setminus A$.
- Jos $B \subseteq A$, niin $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, missä $\bar{A} = S \setminus A$.
- Jos $B \subseteq A$, niin $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Seurauksia

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, missä $\bar{A} = S \setminus A$.
- Jos $B \subseteq A$, niin $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A) \leq 1$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Esimerkki

Olkoot $A = \{2, 4, 6\}$ (parillinen silmäluku) ja $B = \{5, 6\}$ (vähintään 5). Tällöin

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Määritelmä

Tapaukset A ja B ovat *riippumattomat*, jos

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Määritelmä

Tapaukset A ja B ovat *riippumattomat*, jos

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Esimerkki

Heitetään kahta noppaa. Todennäköisyys sille, että 1. noppa tuottaa kolmosen (A) ja toinen nelosen (B), on

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Huomautus

- Toisensa poissulkevat tapaukset ovat riippuvia: Jos toinen tapahtuu, ei toinen voi tapahtua

Huomautus

- Toisensa poissulkevat tapaukset ovat riippuvia: Jos toinen tapahtuu, ei toinen voi tapahtua (paitsi jos nollatodennäköisyys molemmilla).

Huomautus

- Toisensa poissulkevat tapaukset ovat riippuvia: Jos toinen tapahtuu, ei toinen voi tapahtua (paitsi jos nollatodennäköisyys molemmilla).
- Riippumattomuudesta ei kuitenkaan seuraa poissulkevuus.

Huomautus

- Toisensa poissulkevat tapaukset ovat riippuvia: Jos toinen tapahtuu, ei toinen voi tapahtua (paitsi jos nollatodennäköisyys molemmilla).
- Riippumattomuudesta ei kuitenkaan seuraa poissulkevuus.
- Jos A ja B ovat riippumattomat, niin ovat myös A ja $\bar{B}$, kuin myös $\bar{A}$ ja B , sekä $\bar{A}$ ja $\bar{B}$.

Esimerkki

Kolme metsästäjää 1, 2 ja 3 ampuu samaa jänistä toisistaan riippumatta.

Esimerkki

Kolme metsästäjää 1, 2 ja 3 ampuu samaa jänistä toisistaan riippumatta. 1. osuu todennäköisyydellä 0,05, 2. 0,08 ja 3. 0,01. Olkoon A_i tapaus, että jänikseen osuu i laukausta, $0 \leq i \leq 3$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_0) &= \mathbb{P}(\bar{1} \cap \bar{2} \cap \bar{3}) = \mathbb{P}(\bar{1})\mathbb{P}(\bar{2})\mathbb{P}(\bar{3}) \\ &= 0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,99 = 0,86526\end{aligned}$$

(kukaan ei osu)

Esimerkki

Kolme metsästäjää 1, 2 ja 3 ampuu samaa jänistä toisistaan riippumatta. 1. osuu todennäköisyydellä 0,05, 2. 0,08 ja 3. 0,01. Olkoon A_i tapaus, että jänikseen osuu i laukausta, $0 \leq i \leq 3$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_0) &= \mathbb{P}(\bar{1} \cap \bar{2} \cap \bar{3}) = \mathbb{P}(\bar{1})\mathbb{P}(\bar{2})\mathbb{P}(\bar{3}) \\ &= 0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,99 = 0,86526\end{aligned}$$

(kukaan ei osu)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(1 \cap \bar{2} \cap \bar{3}) + \mathbb{P}(\bar{1} \cap 2 \cap \bar{3}) + \mathbb{P}(\bar{1} \cap \bar{2} \cap 3) \\ &= 0,05 \cdot 0,92 \cdot 0,99 + 0,95 \cdot 0,08 \cdot 0,99 \\ &= +0,95 \cdot 0,92 \cdot 0,01 = 0,12952\end{aligned}$$

(yksi osuu)

Määritelmä

Ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}(A \mid B)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, jolla A tapahtuu, kun tiedetään, että B on tapahtunut.

Määritelmä

Ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}(A \mid B)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, jolla A tapahtuu, kun tiedetään, että B on tapahtunut.

Esimerkki

Jos tiedetään, että nopanheitossa tulos on parillinen, niin nelosen todennäköisyys on $\frac{1}{3}$. Jos taas tiedetään, että tulos on pariton, on nelosen todennäköisyys 0.

Todennäköisyysslaskennan peruskäsitteitä

Määritelmä

Ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}(A \mid B)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, jolla A tapahtuu, kun tiedetään, että B on tapahtunut.

Esimerkki

Jos tiedetään, että nopanheitossa tulos on parillinen, niin nelosen todennäköisyys on $\frac{1}{3}$. Jos taas tiedetään, että tulos on pariton, on nelosen todennäköisyys 0.

Lause

Jos $\mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Bayesin lause

Jos $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)$$

Bayesin lause

Jos $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$, on

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B)$$

Seuraus

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(C \mid A \cap B).$$

Esimerkki

Kahdella ihmisellä 10 000:sta on virustartunta. Tartunnan saaneilla ihmisillä testi ilmoittaa 99,99% todennäköisyydellä tartunnasta, kun taas niillä joilla ei ole tartuntaa, testi ilmoittaa sen 99,9% todennäköisyydellä.

Esimerkki

Kahdella ihmisellä 10 000:sta on virustartunta. Tartunnan saaneilla ihmisillä testi ilmoittaa 99,99% todennäköisyydellä tartunnasta, kun taas niillä joilla ei ole tartuntaa, testi ilmoittaa sen 99,9% todennäköisyydellä.

Tartunnan todennäköisyys positiivisen testituloksen saaneille voidaan laskea seuraavasti: Merkitään tapauksia T (tartunta), E (ei tartuntaa), P (positiivinen testitulos) ja N (negatiivinen testitulos).

Esimerkki

Kahdella ihmisellä 10 000:sta on virustartunta. Tartunnan saaneilla ihmisillä testi ilmoittaa 99,99% todennäköisyydellä tartunnasta, kun taas niillä joilla ei ole tartuntaa, testi ilmoittaa sen 99,9% todennäköisyydellä.

Tartunnan todennäköisyys positiivisen testituloksen saaneille voidaan laskea seuraavasti: Merkitään tapauksia T (tartunta), E (ei tartuntaa), P (positiivinen testitulos) ja N (negatiivinen testitulos). Tällöin siis $\mathbb{P}(T) = 0,0002$, $\mathbb{P}(E) = 0,9998$, $\mathbb{P}(P | T) = 0,9999$, $\mathbb{P}(N | T) = 0,0001$, $\mathbb{P}(P | E) = 0,001$ ja $\mathbb{P}(N | E) = 0,999$.

Esimerkki

Bayesin lauseen mukaan

$$\mathbb{P}(T | P) = \frac{\mathbb{P}(P | T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(P)}.$$

Esimerkki

Bayesin lauseen mukaan

$$\mathbb{P}(T | P) = \frac{\mathbb{P}(P | T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(P)}.$$

Koska

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P | T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(P | E)\mathbb{P}(E) \\ &= 0,9999 \cdot 0,0002 + 0,001 \cdot 0,9998 = 0,00119978,\end{aligned}$$

on

$$\mathbb{P}(T | P) = \frac{0,9999 \cdot 0,0002}{0,00119978} = 0,166681$$

Määritelmä

Äärellisen (tai numeroituvan) joukon $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq R$ todennäköisyysjakauma on funktio joka toteuttaa ehdot $f(x) \geq 0$ ja $\sum_{x \in X} f(x) = 1$.

Määritelmä

Äärellisen (tai numeroituvan) joukon $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq R$ todennäköisyysjakauma on funktio joka toteuttaa ehdot $f(x) \geq 0$ ja $\sum_{x \in X} f(x) = 1$. Tällöin sanotaan, että f on *diskreetti todennäköisyysjakauma* ja että satunnaismuuttuja X saa arvon x_i todennäköisyydellä $f(x_i)$.

Määritelmä

Jos $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

sanotaan että f on jatkuva todennäköisyysjakauma.

Määritelmä

Jos $f(x) \geq 0$ ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$$

sanotaan että f on jatkuva todennäköisyysjakauma.

Määritelmä

Jatkuvaan jakaumaan f liittyvä satunnaismuuttuja X saa arvon välillä $[a, b]$ todennäköisyydellä

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$