

Insinöörimatematiikka 3

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Määritelmä

Lähtökohtana on diskreetti satunnaismuuttuja X , joka voi saada n arvoa $x_1, \dots, x_n$ todennäköisyyksillä $p_1, \dots, p_n$.

Jakauman $p_1, \dots, p_n$ *Shannon-entropia* on

$$H(p_1, \dots, p_n) = -K(p_1 \ln p_1 + \dots + p_n \ln p_n),$$

missä $K > 0$ on vakio. Jos $K = \frac{1}{\ln 2}$, sanotaan entropiaa binääriseksi. Tällöin $\frac{\ln p_i}{\ln 2} = \log_2 p_i$. Määritellään lisäksi $0 \cdot \ln 0 = 0$. Jos diskreetillä satunnaismuuttujalla X on jakauma $p_1, \dots, p_n$, merkitään ylläolevaa entropiaa myös $H(X)$:llä.

Esimerkki

Jos kaikki arvot x_i ilmaantuvat samalla todennäköisyydellä $\frac{1}{n}$, on

$$H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = -\left(\frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n}\right) = \log_2 n.$$

Tämä merkitsee sitä, että satunnaismuuttujan X esittämän viestin välittämiseen tarvitaan keskimäärin $\log_2 n$ bittiä.

Esimerkki

Jos satunnaismuuttuja X saa arvon x_1 todennäköisyydellä 1 ja muut arvot $x_2, \dots, x_n$ todennäköisyydellä 0, on

$$H(X) = -(1 \cdot \log_2 1 + 0 \cdot \log_2 0 + \dots + 0 \cdot \log_2 0) = 0$$

Esimerkki

Satunnaismuuttuja X saa kaksi arvoa x_0 ja x_1 , molemmat todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$. Tällöin

$$H(X) = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Esimerkki

Satunnaismuuttuja X saa arvon x_0 todennäköisyydellä $\frac{1}{4}$ ja arvon x_1 todennäköisyydellä $\frac{3}{4}$. Tällöin

$$H(X) = -\left(\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \log_2 \frac{3}{4}\right) = 0,811278 \dots$$

Lause

Oletetaan että reaaliarvoinen funktio $H(p_1, \dots, p_n)$ toteuttaa seuraavat ehdot:

- $H(p_1, \dots, p_n)$ on symmetrinen ja jatkuva
- $H(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ on ei-negatiivinen, aidosti kasvava
- Todennäköisyysjakaumille $(p_1, \dots, p_n)$ ja $(q_1, \dots, q_m)$ on voimassa

$$\begin{aligned} & H(p_1, \dots, p_n) + p_n H(q_1, \dots, q_m) \\ = & H(p_1, \dots, p_{n-1}, p_n q_1, \dots, p_n q_m). \end{aligned}$$

Tällöin

$$H(p_1, \dots, p_n) = -K(p_1 \ln p_1 + \dots + p_n \ln p_n),$$

missä $K > 0$ on vakio.

Yhdistetty entropia

$$H(X, Y) = - \sum p(x, y) \log_2 p(x, y)$$

Ehdollinen entropia

$$H(X \mid y_j) = - \sum p(x \mid y_j) \log_2 p(x \mid y_j)$$

$$H(X \mid Y) = \sum p(y_j) H(X \mid y_j)$$

Informaatio

$$I(X \mid Y) = H(X) - H(X \mid Y)$$

Määritelmä

Mikäli n -pituinen jono satunnaismuuttujan X arvoista muodostuvia viestejä voidaan koodata $m = \lfloor rn \rfloor$ -pituisilla bittijonoilla, sanotaan, että koodaus onnistuu tahdilla (rate) r .

Shannonin lause

Jos $r > H(X)$, on mahdollista koodata X :n arvot binääriseen aakkostoon tahdilla r siten että dekodeausvirheen todennäköisyys lähenee nollaa.

Jos $r < H(X)$, edellämainittu koodaus ei ole mahdollista, vaan dekodeausvirheen todennäköisyys lähenee ykköstä.

Määritelmä

Binäärisen symmetrisen kanavan *kapasiteetti* on

$$C(p) = 1 - H_2(p),$$

missä p on kanavan virhetodennäköisyys.

Koodin C_n *informaatiosuhde* on

$$R(C_n) = \frac{\log_2 |C_n|}{n}.$$

Shannonin lause 2

Jos $p < \frac{1}{2}$ ja $R < C(p)$ ja $\epsilon > 0$, niin on sellainen rajaluku $N = N(p, R, \epsilon)$, että aina kun $n \geq N$, niin on olemassa n -pituinen binäärikoodi C_n jolle $R(C_n) \geq R$ ja $\mathbb{P}_{er}(C_n) < \epsilon$.

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx.$$

Sarja määritellään analogisesti.

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Osasummat muodostavat *lukujonon* $S_1, S_2, S_3, \dots$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on funktio $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}; a(n) = a_n$

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvo on A , merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \rightarrow d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on äärellisenä olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause

Ylhäältä rajoitetut, kasvavat lukujonot suppenevat

Esimerkki

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono. Sen osasummien jono $S_1, S_2, S_3, \dots$ määritellään $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim S_n$ on äärellisenä

olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$). Jos sarja suppenee, sanotaan, että sen *summa* on $S = \lim S_n$.

Esimerkkejä

Esimerkit 4–7 (Moniste 2019)

Lause

- Jos sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat, niin myös sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

suppenee ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

- Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ($k > 1$) suppenee, ja tällöin on

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

- Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, niin myös $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Mikäli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ suppenee, sanotaan, että } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ suppenee } \textit{itseisesti}.$$

Tällöin pätee

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on geometrinen, jos kaikille $n \in \mathbb{N}$ on

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{vakio}).$$

Geometrinen jono on siis muotoa $a, aq, aq^2, aq^3, \dots$

Määritelmä

Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

on geometrinen, jos jono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on geometrinen.

Osasumat

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

- Jos $q = 1$, on $S_n = na$.
- Jos $q = -1$, on $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1})a$
- Jos $q \neq 1$, on $S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$.
- Jos $|q| < 1$, on $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- Jos $|q| > 1$, ei raja-arvoa $\lim q^n$ ole äärellisenä.

Lause

Jos $a \neq 0$, suppenee sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$$

tarkalleen silloin kun $|q| < 1$. Suppenevassa tapauksessa sarjan summa on

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a \frac{1}{1 - q}.$$

Esimerkki

Esimerkki 8 (Moniste 2019)

Desimaaliesitys

$$3,141592653589793\dots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

Esimerkkejä

- Jokainen sarja

$$k + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

missä $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, suppenee.

- Esimerkit 9–11 (vuoden 2019 moniste)

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Huomautus

Edellinen kriteeri on välttämätön, ei riittävä ehto suppenemiselle.

Esimerkiksi harmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu, vaikka $\lim \frac{1}{n} = 0$.