

Insinöörimatematiikka 3

Mika Hirvensalo
`mikhirve@utu.fi`

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2022

Lause

Jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee, niin $\lim a_n = 0$.

Huomautus

Edellinen kriteeri on välttämätön, ei riittävä ehto suppenemiselle.

Esimerkiksi harmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu, vaikka $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Cauchyn suppenemisehto

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee tarkalleen silloin kun

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_{\epsilon})(M \geq M_{\epsilon} \wedge k \geq 0 \rightarrow \left| \sum_{n=M}^{M+k} a_n \right| < \epsilon)$$

"Sarja suppenee mikäli (katkaistu) loppuosa saadaan mielivaltaisen pieneksi ($< \epsilon$) valitsemalla katkaisukohta M riittävän suureksi"

Suppenemiskriteereitä

Lause

Jos f on ei-negatiivinen ja vähenevä, on

$$\int_M^\infty f(t) dt \leq \sum_{n=M}^\infty f(n) \leq f(M) + \int_M^\infty f(t) dt$$

Seuraus: Vertaaminen integraaliin

Olkoon $f(x) \geq 0$ ja vähenevä, kun $x \in [1, \infty)$. Tällöin

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \downarrow \Leftrightarrow \int_1^\infty f(t) dt \downarrow$$

Seuraus

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \downarrow \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{t^s} dt \downarrow \Leftrightarrow s > 1$$

Minorantti-majoranttiperiaate

Jos $|a_n| \leq b_n$ jostain rajasta alkaen, niin

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \quad \left(\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow \right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \uparrow$

Esimerkkejä

Esimerkit 13 ja 14 (vuoden 2019 moniste)

Minorantti-majoranttiperiaatteen raja-arvomuoto

Oletetaan, että $\lim \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = L$.

- Jos $L = 0$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow$
- Jos $0 < L < \infty$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \downarrow$.
- Jos $L = \infty$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \uparrow \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow$.

Osamäärätarkastin

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta M alkaen

- $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$, (q vakio) niin sarja suppenee itseisesti.
- $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Osamäärätarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

- Jos $L < 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti.
- Jos $L > 1$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Esimerkkejä

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Lause (Juuritarkastin)

Jos sarjassa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ on jostain rajasta alkaen

- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, niin sarja suppenee itseisesti
- $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

Juuritarkastimen raja-arvomuoto

Olkoon $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

- Jos $L < 1$, niin sarja suppenee (itseisesti)
- Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu

Määritelmä

Jos $a_n \geq 0$, sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

on vuorotteleva.

Leibnizin lause

Jos $a_n \geq 0$, jono a_n on vähenevä ja $\lim a_n = 0$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

suppenee. Jos lisäksi merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^M (-1)^{n-1} a_n + R_M,$$

on

$$R_M = (-1)^M a_{M+1} + (-1)^{M+1} a_{M+2} + (-1)^{M+2} a_{M+3} + \dots$$

samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi $(-1)^M a_{M+1}$ ja $|R_M| \leq a_{M+1}$.

Esimerkki

Esimerkki 15 (vuoden 2019 moniste)

Lause

Sulkeiden asettaminen suppenemaan sarjaan ei muuta suppenemista eikä summaa.

Esimerkki 16. (vuoden 2019 moniste)

Lause

Sulkeiden poisto voi muuttaa suppenemista tai summaa.

Esimerkki 17. (vuoden 2019 moniste)

Kertaus (määritelmiä)

- Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee ehdollisesti, jos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, mutta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hajaantuu.
- Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti, jos myös $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee.

Lause

- Jos sarja suppenee ehdollisesti, voidaan summaa muuttaa tai saada hajaantuva sarja termien järjestystä vaihtamalla.
- Jos sarja suppenee itseisesti, termien järjestyksenvaihto ei vaikuta suppenemiseen eikä summaan.

Määritelmä

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$$

tarkoittaa sarjaa, jonka termeinä ovat kaikki tulot $a_n b_m$ $n, m \geq 1$ jossain järjestyksessä.

Lause

Jos $S = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ ja $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat itseisesti, niin jokainen tulosarja $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n$ suppenee itseisesti kohti tuloa ST .

Cauchyn tulo

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m+n=k} a_m b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_{k-n} b_n.$$

Esimerkki

Esimerkki 18 (2019 moniste)

Taylorin polynomit

$$F(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots + a_nx^n,$$

missä $a_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}$ yleistyy muotoon

$$\begin{aligned} F(x) &= a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + \dots + a_nf_n(x) \\ &= a_1f(1, x) + a_2f(2, x) + \dots + a_nf(n, x). \end{aligned}$$

Funktiojonon $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ (Toinen merkintä: $f_n(x) = f(n, x)$) jäseniä sanotaan *kantafunktioiksi*. Esim. $1, x, x^2, x^3, \dots$

Funktioiden esityksistä

Integraaliesitys

Summaesitys

$$F(x) = a_1 f(1, x) + a_2 f(2, x) + \dots + a_n f(n, x)$$

voidaan yleistää integraaliksi

$$F(x) = \int_a^b a(t) f(t, x) dt,$$

mikä voidaan vielä yleistää I lajin epäoleelliseksi integraaliksi

$$F(x) = \int_a^\infty a(t) f(t, x) dt.$$

Esimerkki

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Sarjaesitys

Summaesitys

$$F(x) = a_1 f(1, x) + a_2 f(2, x) + \dots + a_n f(n, x)$$

voidaan yleistää myös sarjaksi:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(n, x).$$

Yhteenveto

- Summa: $F(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$
- Sarja: $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$
- Integraali: $F(x) = \int_a^b a(t) f(t, x) dt$
- Epäoleellinen integraali: $F(x) = \int_1^{\infty} a(t) f(t, x) dt$

Taylorin sarjat

Jos F :llä on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä x_0 ja välillä $x \in I$ toteutuu

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R(x - x_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x - x_0) = 0,$$

niin $F(x)$ voidaan (välillä I) esittää Taylorin sarjana

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

missä

$$a_k = \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Esimerkki

Esimerkki 27 (vuoden 2019 moniste)

Määritelmä

Muotoa

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

olevaa funktiosarjaa sanotaan potenssisarjaksi.

Huomautus

Sijoituksella $t = x - x_0$ voidaan aina palauttaa tarkastelu tapaukseen $x_0 = 0$. Teoriaa kehitettäessä voidaan siksi aina rajoittua tapaukseen $x_0 = 0$. Tällöin sarjaa kutsutaan myös Maclaurinin sarjaksi.

Lause

Jokaiselle potenssisarjalle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

on voimassa yksi seuraavista vaihtoehdoista:

- Sarja hajaantuu aina kun $x \neq x_0$
- On olemassa luku $R > 0$ jolle pätee: sarja suppenee, kun $|x - x_0| < R$ ja hajaantuu kun $|x - x_0| > R$
- Sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Lukua R kutsutaan suppenemissäteeksi. Ensimmäisessä tapauksessa sanotaan, että $R = 0$ ja viimeisessä, että $R = \infty$.

Lause

Potenssisarjan summafunktiolle

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sen suppenemisvälillä $(-R, R)$ pätee:

- $F(x)$ on jatkuva
- $F(x)$ voidaan integroida termeittäin.
- $F(x)$ voidaan derivoida termeittäin. Myös derivaattasarjan suppenemissäde on R .

Seuraus

Potenssisarjan summafunktiolla $F(x)$ on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat ja $a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$

Esimerkki 30

Binomisarja

Esimerkki 31

Arkussin sarja

EkspONENTTIFUNKTIO

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

TRIGONOMETRISET FUNKTIOT

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

ja

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Imaginaariyksikön potenssit

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$$

Eulerin kaava

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

Näkökulma lineaarialgebrasta

Välillä $[a, b]$ suppenevat potenssisarjat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

muodostavat ääretönulotteisen vektoriavaruuden, kantana $\{(x - x_0)^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Kertoimet saadaan lausekkeesta $a_n = \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}$, missä $F(x)$ on ylläolevan sarjan summafunktio.

Huomautus

Polynomifunktiot sisältyvät tähän vektoriavaruuteen.

Rekursioyhtälöt

Määritelmä

Fibonaccin luvut F_n ovat alkuarvoilla $F_0 = 1$ ja $F_1 = 1$ ja rekursiolla $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ määritelty lukujono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,



Fibonaccin luvut

Ratkaisemalla rekursioyhtälö (potenssisarjojen avulla) nähdään, että

Eksplisiittinen muoto

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Huomautus

Koska $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$ ja $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,61803\dots$, on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = 0$$

ja siksi

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

Likimääräistys on sitä tarkempi mitä suurempi n on.

Määritelmä

- f -taajuinen sinifunktio $s_f(x) = \sin(2\pi fx)$
- f -taajuinen kosinifunktio $c_f(x) = \cos(2\pi fx)$
- f -taajuiset eksponenttifunktiot $e_{+f}(x) = e^{2\pi ifx}$ ja $e_{-f}(x) = e^{-2\pi ifx}$

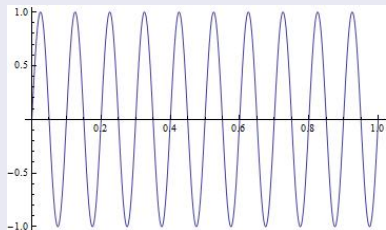
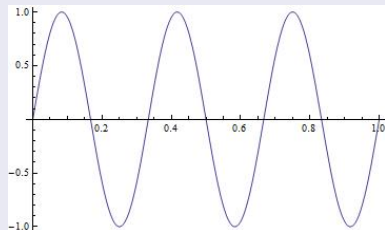
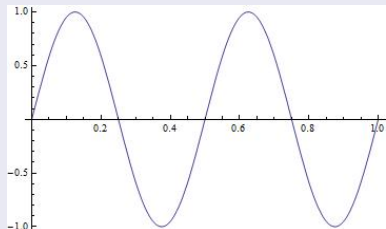
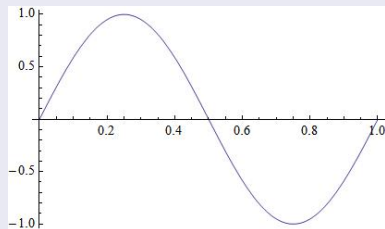
Eulerin kaava:

$$e_{+f}(x) = c_f(x) + is_f(x) \quad \text{ja} \quad e_{-f}(x) = c_f(x) - is_f(x)$$

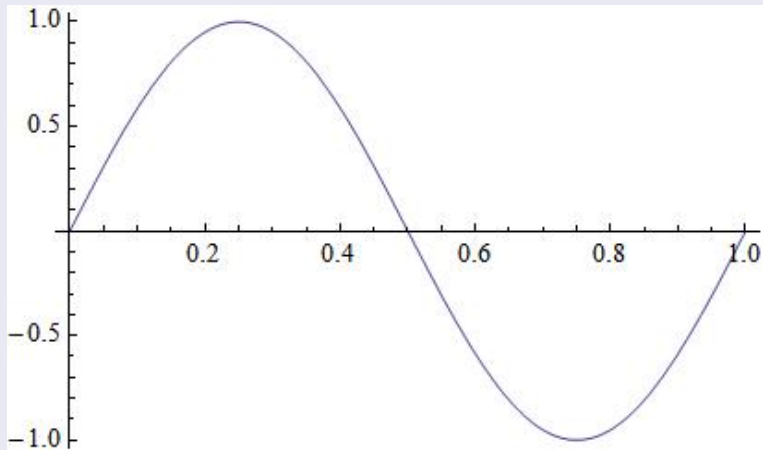
$$c_f(x) = \frac{1}{2}(e_{+f}(x) + e_{-f}(x)) \quad \text{ja} \quad s_f(x) = \frac{1}{2i}(e_{+f}(x) - e_{-f}(x))$$

Fourier-analyysi

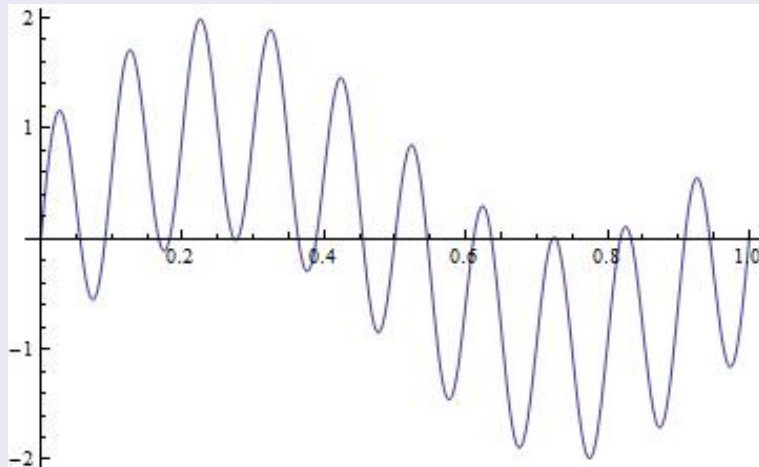
$s_1(x), s_2(x), s_3(x), s_{10}(x)$



$s_1(x)$

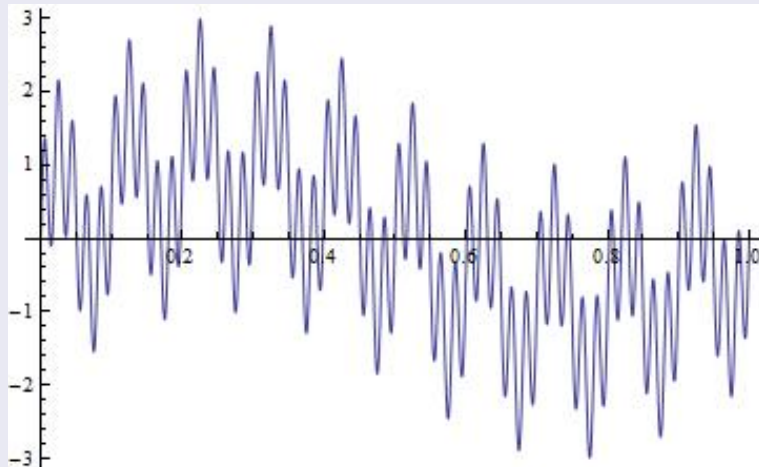


$$s_1(x) + s_{10}(x)$$



Fourier-analyysi

$$s_1(x) + s_{10}(x) + s_{50}(x)$$



Fourier-analyysi

Lause

f -taajuisilla sini-, kosini- ja eksponenttifunktioilla on jakso $T = \frac{1}{f}$.

Todistus (vain s_f :lle)

$$s_f\left(x + \frac{1}{f}\right) = \sin\left(2\pi f\left(x + \frac{1}{f}\right)\right) = \sin(2\pi fx + 2\pi) = \sin(2\pi fx) = s_f(x)$$

Seuraus

Funktioilla $s_{\frac{n}{T}}(x)$, $c_{\frac{n}{T}}(x)$, ja $e_{\frac{n}{T}}(x)$ on jakso T .

Todistus (vain s :lle)

$$\begin{aligned} s_{\frac{n}{T}}(x + T) &= \sin\left(2\pi \frac{n}{T}(x + T)\right) \\ &= \sin\left(2\pi \frac{n}{T}x + 2\pi n\right) = \sin\left(2\pi \frac{n}{T}x\right) = s_{\frac{n}{T}}(x). \end{aligned}$$

Lause

T -jaksoiselle eksponenttifunktiolle pätee

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{\frac{2\pi in}{T}x} dx = \begin{cases} 0, & \text{jos } n \neq 0 \\ T, & \text{jos } n = 0 \end{cases}$$

Määritelmä

Fourier-sarjoille kahteen suuntaan ääretön sarja tarkoittaa (poikkeuksellisesti) seuraavaa:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M F_n.$$

Määritelmä

T -jaksoisen funktion Fourier-sarja on

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}.$$

Lukuja $F_n \in \mathbb{C}$ kutsutaan funktion f Fourier-kertoimiksi tai spektriiksi. Jos $F_n \neq 0$ tai $F_{-n} \neq 0$, sanotaan, että funktiossa f esiintyy taajuus $\frac{n}{T} = nf$. Kertoimia $F_{\pm n}$ sanotaan myös taajuuden $\frac{n}{T}$ amplitudeiksi.

Huomautus

Koska kaikki osafunktiot ovat T -jaksoisia, on myös summafunktio (mikäli suppenee) sellainen.

Näkökulma lineaarialgebrasta

Suppenevat Fourier-sarjat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

muodostavat ääretönulotteisen vektoriavaruuden, kantana $\{e^{\frac{2\pi i n}{T} x} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Hermiten sisätulo

$$(e^{\frac{2\pi i n}{T} x}, e^{\frac{2\pi i m}{T} x}) = \int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{\frac{2\pi i n}{T} x} e^{-\frac{2\pi i m}{T} x} dx = \begin{cases} T & \text{jos } m = n, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Kertoimien F_n selvittäminen

Lasketaan funktioiden $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$ ja $e^{\frac{2\pi i m}{T} x}$ sisätulo:

$$(f, e^{\frac{2\pi i m}{T} x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n (e^{\frac{2\pi i n}{T} x}, e^{\frac{2\pi i m}{T} x}) = T F_m.$$

Tästä saadaan

$$F_m = \frac{1}{T} (f, e^{\frac{2\pi i m}{T} x}) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i m}{T} x} dx$$

Huomautus

Luku α on vapaasti valittavissa. Luvun α kiinnittäminen määrää "ikkunan" $[\alpha, \alpha + T]$, josta funktiota f tarkastellaan. Tyypillisiä valintoja ovat $\alpha = 0$ ja $\alpha = -\frac{T}{2}$.

Lause

Olkoon f T -jaksoinen funktio, jolle toispuoleiset derivaatat ovat olemassa. Olkoon lisäksi

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{T} x} dx.$$

Tällöin sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

suppenee pisteessä x_0 kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$.

Reaalinen muoto

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right),$$

missä $A_n = F_n + F_{-n}$ ja $B_n = i(F_n - F_{-n})$.

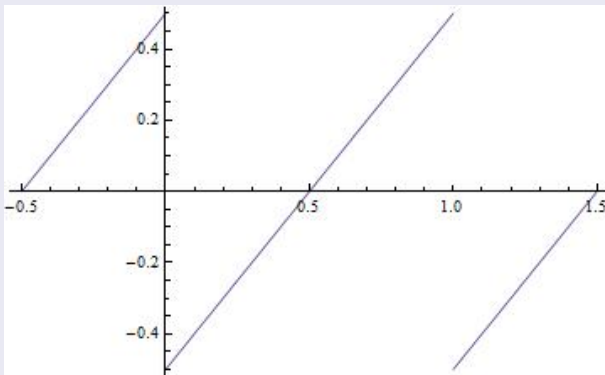
Lause

Jos f on reaaliarvoinen, ovat A_n ja B_n reaalisia.

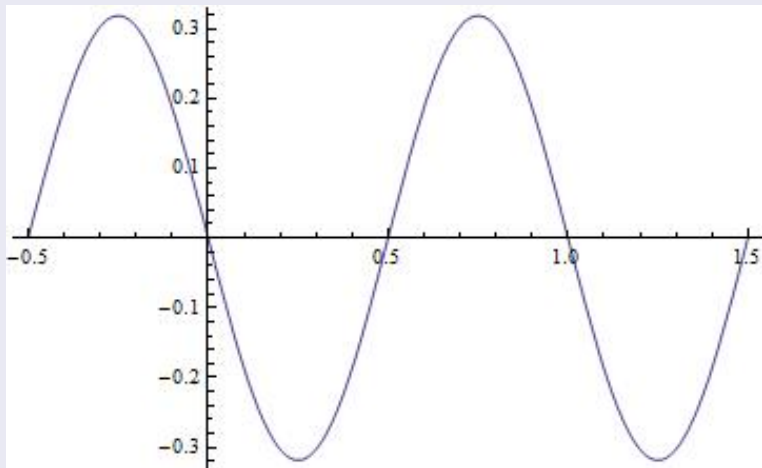
Esimerkkejä

Esimerkit 37–39

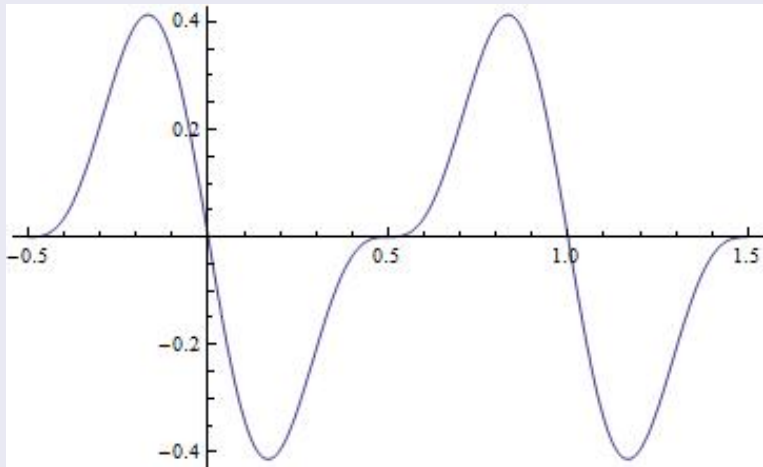
$$\sigma_0(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$$



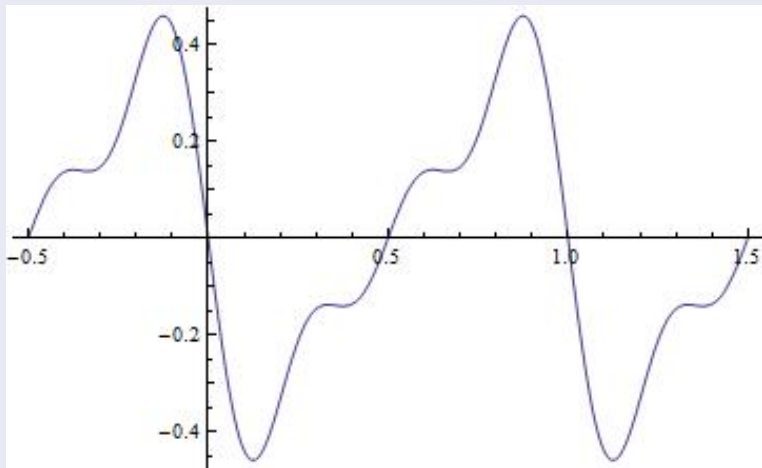
$$-\sum_{n=1}^1 \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



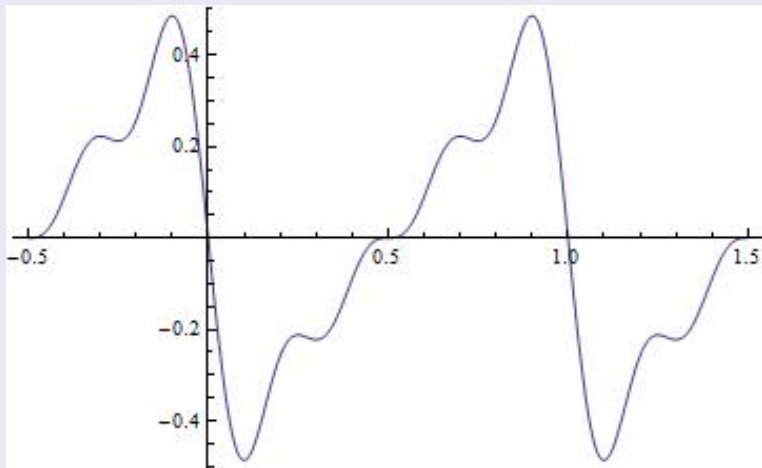
$$-\sum_{n=1}^2 \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



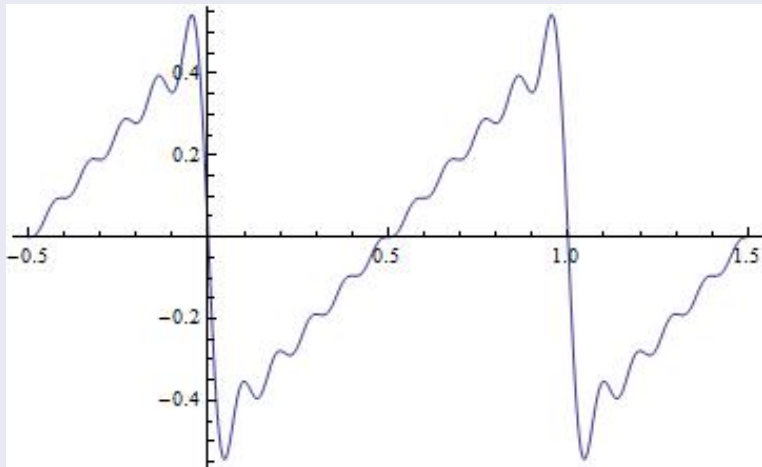
$$-\sum_{n=1}^3 \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



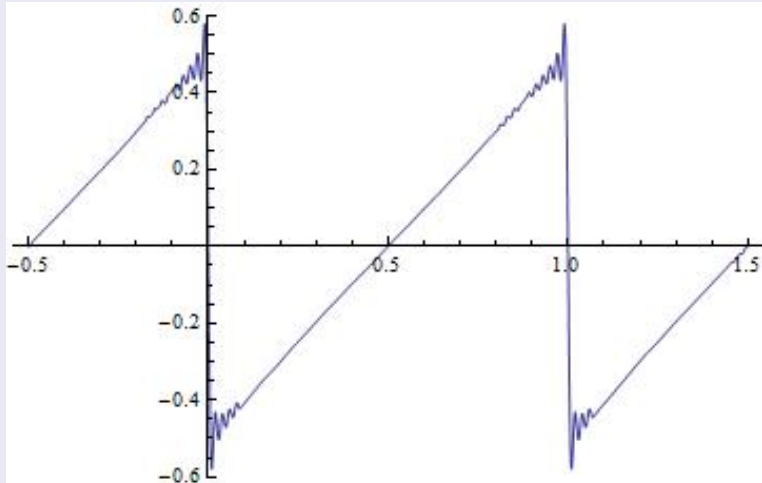
$$-\sum_{n=1}^4 \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



$$-\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



$$-\sum_{n=1}^{50} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$



Esimerkki 40

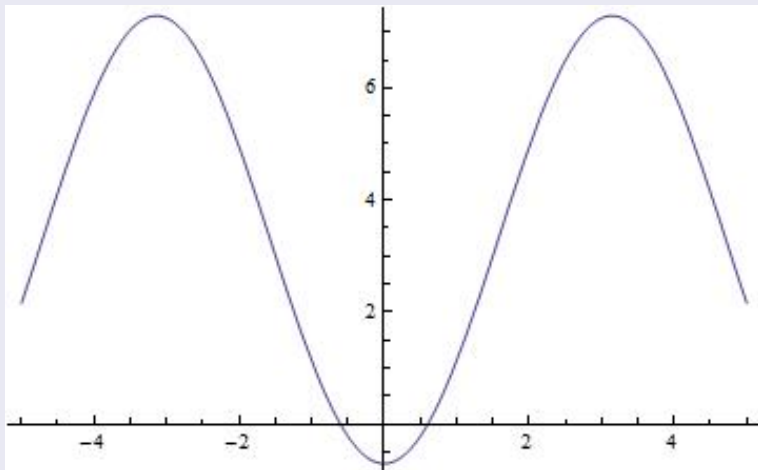
Välillä $[-\pi, \pi]$ on

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

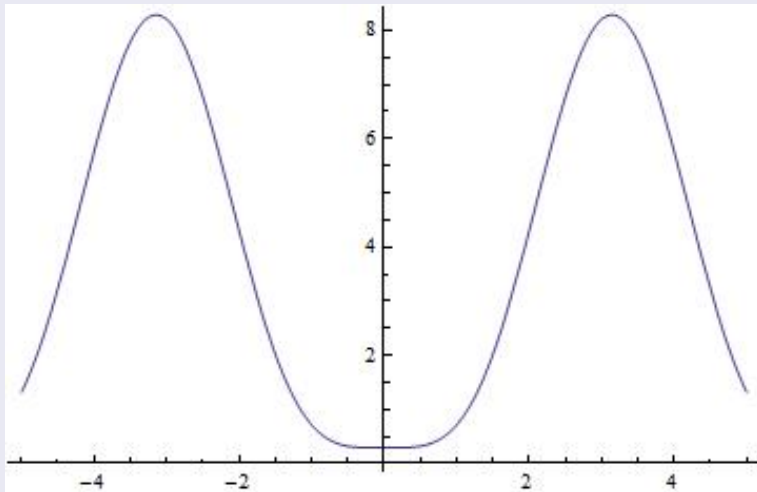
Välillä $(0, 2\pi)$ on

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$

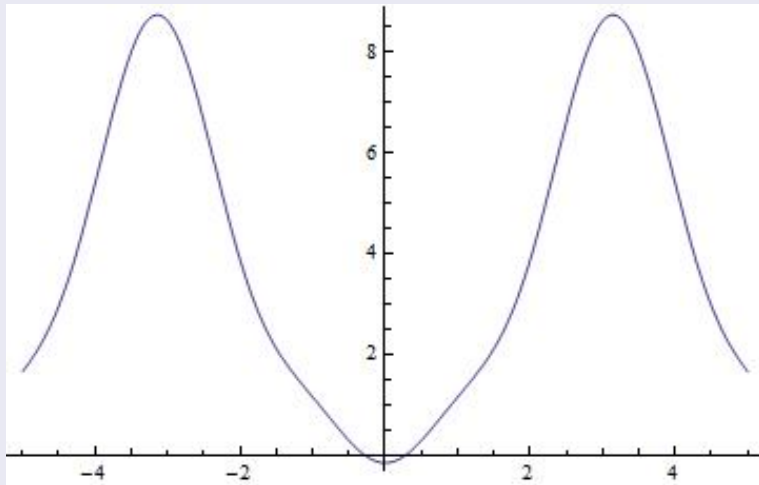
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^1 \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



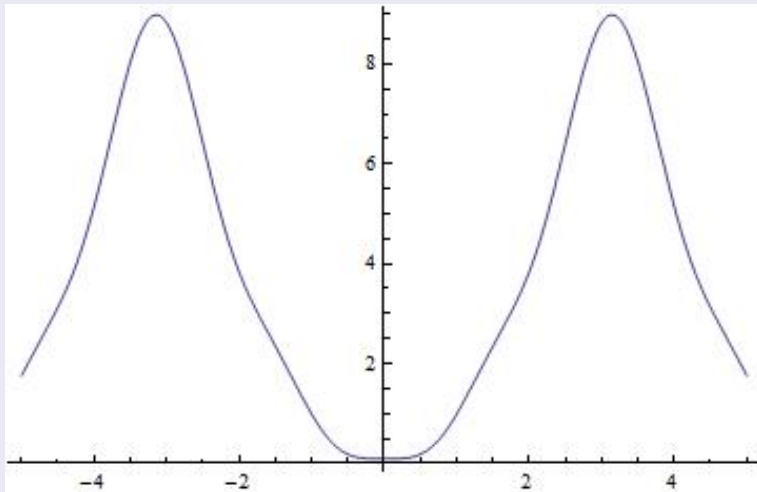
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^2 \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



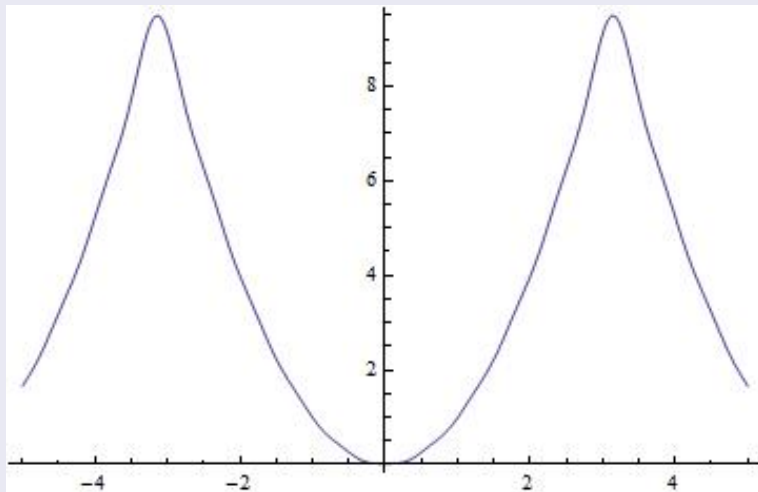
$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^3 \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^4 \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

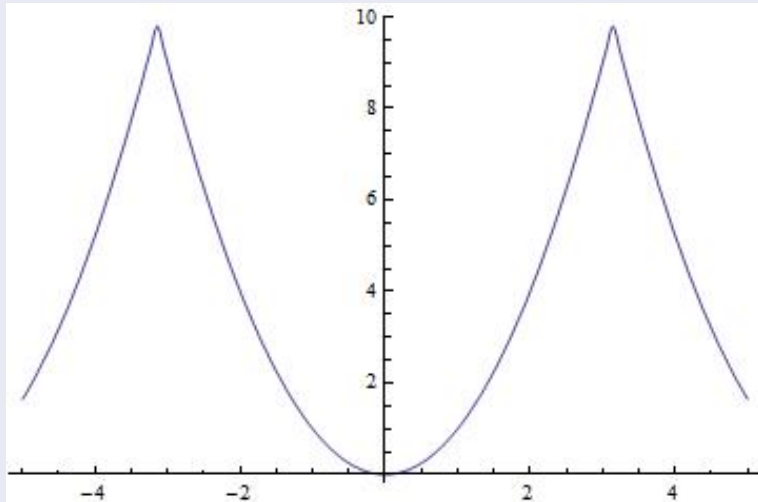


$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{10} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



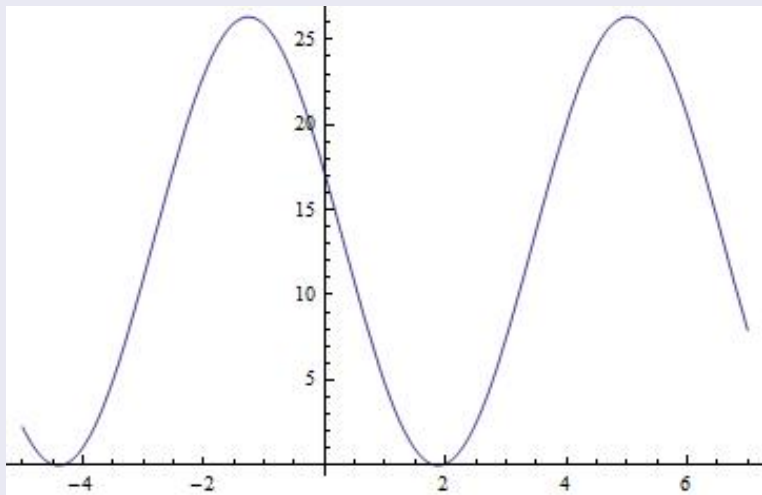
Esimerkki

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{50} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$



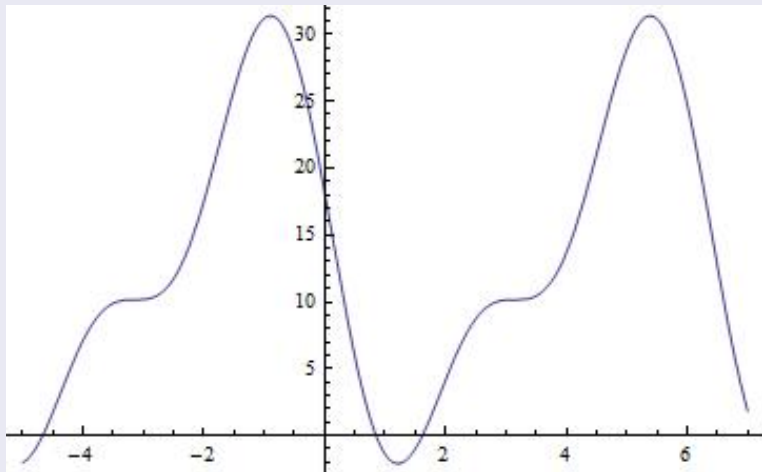
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^1 \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



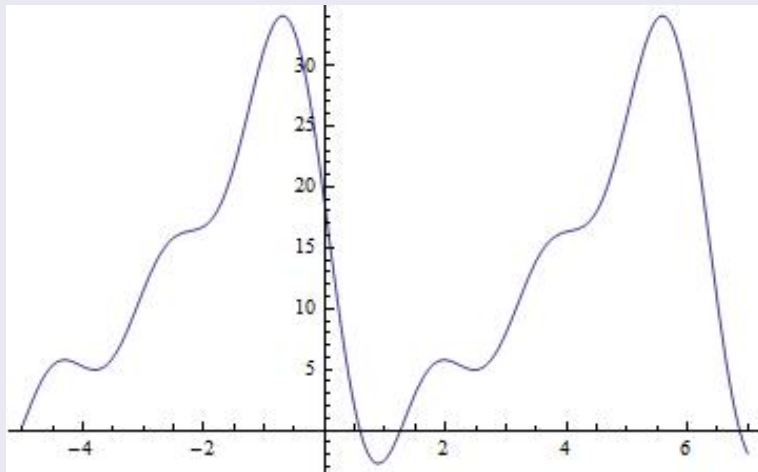
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^2 \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



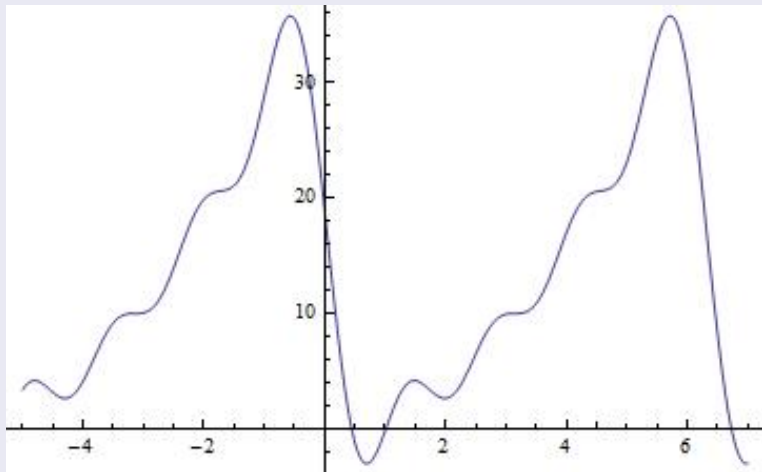
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^3 \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



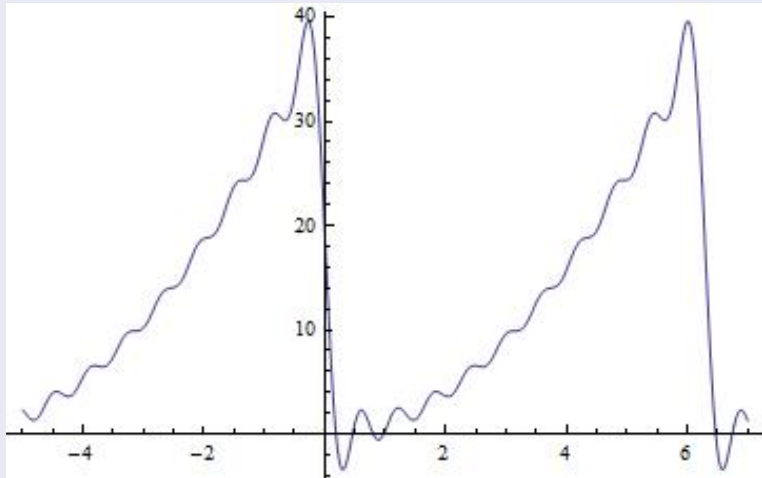
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^4 \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



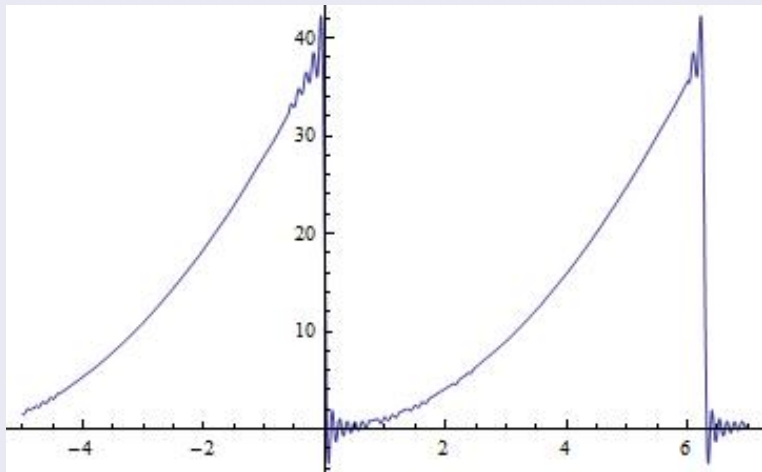
Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



Esimerkki

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{50} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right)$$



Lause

Olkoon f on T -jaksoinen funktio, jolla on Fourier-sarja

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi in}{T}x}.$$

Tällöin Fourier-sarja voidaan integroida termeittäin:

$$\int_0^x f(t) dt = F_0 x + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} F_n \frac{T}{2\pi in} (e^{\frac{2\pi in}{T}x} - 1)$$

Lause

Jos lisäksi funktion f' toispuoleiset derivaatat ovat olemassa, voidaan Fourier-sarja derivoida termeittäin:

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi in}{T} F_n e^{\frac{2\pi in}{T} x}$$

Termeittäin integrointi ja derivointi ovat voimassa myös reaaliselle muodolle.

Esimerkki 41

$$\sigma_0(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t) dt$$

Parsevalin kaava

Jos f :llä ja g :llä on Fourier'n sarjat

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x}$$

ja

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x},$$

on tällöin

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_n}.$$

Parsevalin kaava

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \overline{G_n}.$$

Plancherelin kaava

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

Tulkintaa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n}{T} x} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} x \right)$$

Funktion f Fourier-sarjassa esiintyy perustaajuus $f = \frac{1}{T}$ ja sen kaikki kokonaislukumonikerrat $\frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$ (jos kertoimet $\neq 0$).
Taajuus $\frac{n}{T}$ esiintyy amplitudeilla $F_{\pm n}$ (vaihtoehtoisesti: amplitudeilla A_n ja B_n)

Yleistys

Taajuuksien $\frac{1}{T}, \frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \dots$ sijasta kaikki reaalityyppiset $f \in [0, \infty)$.